**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2008-01-19 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakter: Peter Hegarty, Oscar Marmon
tel. 0733-428321/0762-721860

# Linjär Algebra Z1 (tmv140)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 19/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

**1.** Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
**Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 11 & 13 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Ange det reella tal $a$ för vilket $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ inte utgör en bas till $\mathbb{R}^3$ där (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \end{bmatrix}^T.$$

(c) Om punkten $(2, 3)$ roteras 60 grader moturs runt origo i $\mathbb{R}^2$, i vilken punkt hamnar den ? (2p)

(d) Ange $LU$-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(e) Ange den linje $y = kx + m$ som är bäst anpassad, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna $(0, 1)$, $(1, -2)$ och $(2, 7)$. (3p)

(f) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ange även rangen av koefficientmatrisen till vänster.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

**2.** Lös följande system av differentialekvationer (5p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

Ange även $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ och $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$.

**Var god vänd!**

**3**. Betäm en ortogonal matris $P$ och en diagonal matris $D$ sådan att $P^{-1}MP = D$ där (8p)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ange även en formel för $M^n$, där $n$ är ett godtyckligt positivt udda heltal.

**4**. Låt $V$ vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en ON-bas för $U$. (2p)

(b) Bestäm en bas för $U^{\perp}$ (behöver inte vara en ON-bas).. (2p)

(c) Låt $W$ vara det underrrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 14 \end{bmatrix}$. Ange dimensionen av snittet $V \cap W$. Motivera ditt svar ! (2p)

**5**. Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$. (3p)

(b) Bestäm koordinatorna för vektorn $2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ i basen $\mathcal{C}$. (2p)

**6**. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om $U$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$ så gäller att

$$\dim U + \dim U^{\perp} = n.$$

(b) Om $A^2$ är en inverterbar matris så måste $A$ själv också vara inverterbar.

(c) Spegling i planet $x + y + z = 1$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till sig självt.

(d) Om $A$ är en $4 \times 4$ matris med egenvärden $0, 1, -1, 2$ så gäller att $\text{rang}(A) = 2$.

(e) Om $A$ och $B$ är symmetriska $n \times n$ matriser så måste $AB$ också vara symmetrisk.

(f) Om $U$ är ett 5-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^7$ så finns det en $7 \times 5$ matris $A$ sådan att $U = \text{Col}(A)$ (med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^7$).

**7**. Låt $A$ vara en $n \times n$ matris.

(a) Definiera begreppet: *$A$ är en ortogonal matris.* (2p)

(b) Bevisa att om $A$ och $B$ är ortogonala $n \times n$ matriser så är även $AB$ ortogonal. (2p)

(c) Bevisa att om $\lambda$ är ett egenvärde till en ortogonal matris $A$ så är även $1/\lambda$ ett egenvärde till $A$. (2p)

Kick ass!
/Peter.

**Lösningar**

**1.** (a) Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$

då ändras inte determinanten och matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Om vi då byter plats på $R_2$ och $R_4$ så multipliceras determinanten med $-1$ och matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är triangulär så dess determinant är bara produkten av elementen på huvuddiagonalen, nämligen $1{\cdot}6{\cdot}2{\cdot}1 = 12$. Så den ursprungliga determinanten var $-12$.

(b) Dessa tre vektorer utgör inte en bas till $\mathbb{R}^3$ om och endast om de är linjärt beroende. Det blir samma sak som att $3 \times 3$ matrisen vars rader är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ har en rad av nollor i dess trappstegsform. Så vi börjar med denna matris, nämligen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{bmatrix},$$

och reducerar till trappstegsform. Detta genomförs genom att utföra radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2$$

och trappstegsformen blir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}.$$

Så svaret på uppgiften är : $a = -2$.

(c) Den beskrivna rotationen är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till sig själv vars matris är

$$T = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotationen tar alltså punkten $(2, 3)$ till

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(d) Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 4R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 4R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -17 \end{bmatrix}.$$

Vi kan också skriva ner $L$ direkt, nämligen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi söker minstakvadratlösningen till ekvationssystemet som i matrisform ges av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Svar : $y = 3x - 1$.

(f) Vi arbetar med den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Efter följande sekvens av radoperationer

$$R_2 \mapsto 2R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto 5R_3 - 2R_2, \quad R_2 \mapsto \frac{1}{5}R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Systemet är konsekvent och vi kan låta variablerna $x_3$ och $x_4$ vara fria. Bak-substitution ger då att

$$x_2 = 1 - 2x_3 + x_4, \quad x_1 = 3x_3 - 2x_4.$$

Lösningsmängden till systemet ges alltså av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

**2.** Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då har systemet formen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ och lösningen ges av $\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}_0$. Om vi antar att $A$ är diagonaliserbar, säg $A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, så ges lösningen mer explicit av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Så det gäller att diagonalisera $A$ för att hitta $\lambda_1, \lambda_2$ och $P$ och sedan bara multiplicera ut allting i (1).

Den karakteristiska ekvationen för $A$ är

$$(3-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-5) = 0,$$

så vi har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 5$. Motsvarande egenvektorer hittas på sedvanligt sätt (se uppgift 3 nedan) och vi konstaterar att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer tillhörande $\lambda_1$ resp. $\lambda_2$. Då tar vi

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stoppar vi in allting i (1) och multiplicerar ut så får vi till slut att

$$x_1(t) = x_2(t) = e^{5t}.$$

Speciellt är $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = +\infty$.

**3.** (a) Vi söker egenvärdena och egenvektorerna till $M$. Notera att $M$ är symmetrisk och därmed måste vara diagonaliserbar. Dess karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

som efter beräkningen av determinanten blir

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 7\lambda - 4 = 0.$$

Via inspektion ser man att $\lambda = -1$ är en rot och därmed är $\lambda + 1$ en faktor till VL. Polynomdivision leder till att den återstående kvadratiska faktorn är $\lambda^2 - 3\lambda - 4$, som lätt faktoriserar som $(\lambda+1)(\lambda-4)$. Därmed ser vi att det finns bara två egenvärden, nämligen $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 4$.

$\lambda_1 = -1$ : Vi har

$$M + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationen $R_3 \mapsto R_3 + 2R_1$ erhålls trappstegsformen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 4$ : Vi har

$$M - 4I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationerna $R_3 \mapsto 2R_3 - R_1$, $R_1 \mapsto -\frac{1}{2}R_1$ och $R_2 \mapsto \frac{1}{3}R_2$ erhålls trappstegsformen $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Matrisen $D$ väljs nu enligt

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

När det gäller $P$ så kan man kolla att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är redan parvis ortogonala, så vi behöver bara normalisera dem. Vi tar

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{5}},$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} = \mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||} = \frac{\mathbf{v}_3}{\sqrt{5}}.$$

Då tar vi

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har $P^{-1}MP = D$ så $M = PDP^{-1}$. Därför gäller för varje heltal $n$ att $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Notera då att om $n$ är ett udda heltal så är

$$D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}.$$

Näst, eftersom $P$ är en ortogonal matris så gäller att $P^{-1} = P^T$. Notera vidare att $P$ är faktiskt symmetrisk så $P^T = P$. Så nu kan vi beräkna att

$$M^n = PD^nP = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5}(4^{n-1}-1) & 0 & -\frac{2}{5}(4^n+1) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{5}(4^n+1) & 0 & \frac{1}{5}(4^{n+1}-1) \end{bmatrix}.$$

(Obs! Alla elementen i denna matris är heltal.).

4. (a) Notera att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är inte ortogonala. Vi först byter ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T.$$

Det återstår att normalisera. Vi tar

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Då utgör $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ den efterlängtade ON-basen för $V$.

(b) Ortogonalkomplementet $V^\perp$ kan betraktas som nollrummet till $2 \times 4$ matrisen vars rader är $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Denna matris har trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}.$$

Därför spänns nollrummet upp av vektorerna $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ sådan att

$$x_2 = -x_3 - \frac{18}{7}x_4, \quad x_1 = \frac{8}{7}x_4.$$

Så en bas för nollrummet, och därmed för $V^\perp$, ges t.ex. av $\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 8 & -18 & 0 & 7 \end{bmatrix}^T$.

(c) Låt $U$ vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $V$ och $W$. Då gäller att $\dim(V \cap W) = 4 - \dim U$. För att beräkna dimensionen av $U$ så ställer vi upp de fyra givna vektorerna som spänner upp $U$, nämligen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$, som raderna i en $4 \times 4$ matris. Då gäller att dimensionen av $U$ är lika med rangen av denna matris. Rangen läses av från trappstegsformen.
Så den matris vi vill jobba med är

$$A = \begin{bmatrix} -- & \mathbf{v}_1 & -- \\ -- & \mathbf{v}_2 & -- \\ -- & \mathbf{w}_1 & -- \\ -- & \mathbf{w}_2 & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 5R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_1,$$
$$R_3 \mapsto 7R_3 - 2R_2, \quad R_4 \mapsto 7R_4 + R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 3R_3,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -18 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därför ser vi att matrisen har rang 3, så $\dim U = 3$ också och till slut är $\dim(V \cap W) = 1$.

**5.** (a) Koordinatbytematrisen $P := \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ erhålls genom att skriva vektorerna i basen $\mathcal{C}$ i termer av basen $\mathcal{B}$. Mer precis $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är den $2 \times 2$ matris s.a.

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u}_1 + c\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_2 = b\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2.$$

I matrisform blir detta till

$$[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]P \Rightarrow P = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]^{-1}[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -25 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}.$$

(b) Kalla $2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ för $\mathbf{w}$. Givet är att $\mathbf{w}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$. Vi söker $\mathbf{w}_{\mathcal{C}}$. Det gäller att

$$\mathbf{w}_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\, \mathbf{w}_{\mathcal{B}}.$$

Om $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = P$ så är $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P^{-1}$. Alltså gäller att

$$\mathbf{w}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -11 & -25 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -25 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(ANMÄRKNING : $\mathbf{w} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = -7\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.)

**6.** (a) Sant. Se Theorem 14, section 4.6 och Theorem 3, section 6.1 i boken.

(b) Sant. T.ex. om $A^2$ är inverterbar så är $\det A^2 \neq 0$. Men $\det A^2 = (\det A)^2$ så $\det A \neq 0$ också och därmed är även $A$ inverterbar.

(c) Falskt. Origon ligger inte i planet.

(d) Falskt. Rangen är 3 ty $A$ har 4 linjärt oberoende egenvektorer (Theorem 2, section 5.1) av vilka en ligger i dess nollrum. Tillämpa nu Theorem 14, section 4.6 igen.

(e) Falskt. Låt $A, B$ vara symmetriska. Då gäller (se Theorem 3(d), section 2.1) att $(AB)^T = B^T A^T = BA$. Så $AB$ är symmetirsk endast om $AB = BA$. Följande exempel visar att så är inte alltid fallet. Tag

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Både $A$ och $B$ är symmetriska men $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ är inte det. Notera att $BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

(f) Sant. Välj en bas till $U$ och låt dessa 5 vektorer i $\mathbb{R}^7$ utgöra kolumnerna i $A$.

**7.** Se avsnitt 6.2 i boken.

(a) En $n \times n$ matris $A$ sägs vara *ortogonal* om den är inverterbar och $A^{-1} = A^T$.

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$, v.s.v.

(c) Låt $\lambda$ vara ett egenvärde till den ortogonala matrisen $A$. Eftersom $A$ är inverterbar så är $\lambda \neq 0$. Per definition, finns det en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sådan att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Multiplicera båda leden i denna ekvation till vänster med $A^{-1}$ och därefter dela med $\lambda$ så får vi att $A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$. Per definition innebär detta att $1/\lambda$ är ett egenvärde till $A^{-1}$ (med samma egenvektor). Men eftersom $A$ är ortogonal så är $A^{-1} = A^T$. Detta medför att $1/\lambda$ är ett egenvärde till $A^T$. Men för varje kvadratisk matris gäller att den har samma egenvärden som dess transponat (detta viktiga faktum verkar inte stå i boken, men är en lätt konsekvens av Theorem 3(c), section 5.2). Så $1/\lambda$ måste t.o.m. vara ett egenvärde till $A$ själv, v.s.v.