MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa
Datum: 2007-08-25 kl. 08.30–12.30
Telefonvakter: Peter Lindroth
tel. 0762-721860
Peter Hegarty
tel. 0733-428321

Linjär Algebra Z (tmv140)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 27/8. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Ange ett tal h sådan att vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & h \end{bmatrix}^T$ är en linjärkombination av vektorererna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ där (3p)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

(c) Låt A vara standardmatrisen för spegling i ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$. Ange A^2. (2p)

(d) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ är radekvivalent med matrisen (2p)
$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ange baser till både rad och kolonnrummet för A.

(e) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ i denna bas. (3p)

(f) Låt A vara en matris vars nollrum spänns upp av vektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och för vilken vektorn $w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ är en egenvektor med egenvärdet 2. Ange en matrisekvation med vars hjälp A kan bestämmas. Du behöver **inte** beräkna A. (3p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (6p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Finns det en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Bestäm i så fall en sådan.

Var god vänd!

3. Låt M vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -2 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en bas i M.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ på M.

4. Lös följande system av differentialekvationer (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 9x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

5. Ange den linje som är bäst anpassad, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna (4p)

$$(1,2), \quad (2,4), \quad (3,5), \quad (4,7).$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A är en $17 \times n$ matris av rang 16 så måste n vara minst 16.

(b) För alla 2006×2007 matriser gäller att

$$\dim[\mathrm{Nul}A] + \dim[\mathrm{Col}A] = 2006.$$

(c) Varje 5-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^7$ har en ON-bas.

(d) Om (5×5)-matrisen A har egenvärdena 1,2 och 3, och inga fler, så kan inte A vara inverterbar.

(e) Om (5×5)-matrisen A har egenvärdena 1,2 och 3, och inga fler, så måste A vara inverterbar.

(f) Om A är inverterbar så måste A^{2007} också vara det.

7. (a) Definiera begreppen *inverterbar* och *symmetrisk* matris. (2p)

(b) Bevisa att för varje inverterbar matris A gäller $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. (2p)

(c) Låt A vara en inverterbar symmetrisk matris. Bevisa att matrisen A^{-1} är också symmetrisk. (2p)

Bonne chance!
Peter

Lösningar

1. (a) Vi kan ta en cofactor expansion längs den andra raden så blir determinanten till

$$(-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nu fortsätter vi med en cofactor expansion längs den tredje kolumnen så får vi

$$(-3) \times -(-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \times (1 \times 1 - 2 \times 3) = 15.$$

(b) Vi arbetar med den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{array}\right].$$

Efter följande sekvens av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{array}\right].$$

Systemet är konsekvent och därmed är $\mathbf{v}$ en linjärkombination av $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ om och endast om $h - 5 = 0$, dvs $h = 5$.

(c) A^2 är matrisen till den avbildning som består av en smmansättning av speglingen med sig själv. Men en sådan sammansättning är rent av identitetsavbildningen (oberoende av vilket plan vi speglar i) som tar varje punkt till sig själv. Därmed är

$$A^2 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) De nollskilda raderna i U utgör en bas till $\mathrm{Row}(A)$, dvs en bas till $\mathrm{Row}(A)$ är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Pivotelementen i U ligger i den första och tredje kolumnen. Motsvarande kolumnerna i A utgör en bas till $\mathrm{Col}(A)$, dvs en bas till $\mathrm{Col}(A)$ är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(e) Vi söker skalärer c_1, c_2 sådan att

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}.$$

Skriver vi upp denna ekvation i matrisform så blir den till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

som innebär att

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(f) De givna uppgifterna kan sammanfattas i följande tre ekvationer :

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad A\mathbf{w} = 2\mathbf{w}.$$

Ställer vi upp denna information i matrisform så erhålls matrisekvationen

$$A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

med vars hjälp man kan bestämma A genom att invertera matrisen till vänster.

2. Kalla matrisen för M. Dess karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Det finns inga riktiga genvägar för att beräkna determinanten, men man får kolla att den blir till

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = (1-\lambda)^2(10-\lambda).$$

Därmed finns det två egenvärden, $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 10$. Nu hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 1$: Vi har

$$M - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationerna $R_2 \mapsto R_2 - 2R_1$, $R_3 \mapsto R_3 + 2R_1$ erhålls trappstegsformen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare efter återsubstitution ser vi att egenrummet spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$\lambda_2 = 10$: Vi har

$$M - 10I_3 = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationerna

$$R_2 \mapsto 4R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto 4R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_2 \mapsto -\frac{1}{18}R_2, \quad R_1 \mapsto -\frac{1}{2}R_1,$$

erhålls trappstegsformen $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare efter återsubstitution ser vi att egenrummet spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$. Notera att både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är redan ortogonala mot $\mathbf{v}_3$ som stämmer överens med faktumet att egenrummen för olika egenvärden hos en symmetrisk matris är alltid ortogonala (Lay, Sats 1, s.450). Dock är inte $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonala mot varandrs, så vi först byter ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Nu utgör $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'$ och $\mathbf{v}_3$ en bas till $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till M. För att erhålla en ON-bas återstår att normalisera dem. Så vi tar

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 := \frac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

och då är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ den efterlängtade ON-basen.

3. (a) Vi låter A vara den matris vars rader är de givna vektorerna, dvs

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & -2 \end{bmatrix},$$

så att $M = \text{Row}(A)$. En bas till radrummet erhålls via vanlig Gausselimination. Radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_2 \mapsto -\frac{1}{4}R_2$$

resulterar i trappstegsformen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Därmed är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en bas till M där

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(b) Först behöver vi en ortogonal bas till M. Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är inte ortogonala (deras skalärprodukt är 10). Så vi först byter ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Projektionen av $\mathbf{v}$ på M ges då av

$$\mathbf{v}_M = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||^2}\mathbf{v}_2 = \frac{8}{9}\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

4. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då har systemet formen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ och lösningen ges av $\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}_0$. Om vi antar att A är diagonaliserbar, säg $A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, så ges lösningen mer explicit av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Så det gäller att diagonalisera A för att hitta λ_1, λ_2 och P och sedan bara multiplicera ut allting i (1).

Den karakteristiska ekvationen för A är

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 7)(\lambda + 2) = 0,$$

så vi har egenvärdena $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer hittas på sedvanligt sätt (se uppgift 2) och vi konstaterar att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer tillhörande λ_1 resp. λ_2. Då tar vi

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Stoppar vi in allting i (1) och multiplicerar ut så får vi till slut att

$$x_1(t) = e^{7t} - e^{-2t},$$
$$x_2(t) = \frac{2}{3}e^{7t} + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

5. Vi söker linjen $y = kx + m$ där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$ är minstakvadratlösningen till det ekvationssystem som i matrisform ges av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 53 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18 \\ 53 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 8/5 \end{bmatrix}.$$

Svar : $y = \frac{8}{5}x + \frac{1}{2}$.

6. (a) Sant. Rangen är lika med dimensionen av kolonnrummet, som kan inte överstiga antalet kolonner.

(b) Falskt. Snarare är summan av dessa dimensioner lika med 2007 : se Theorem 14, p.265.

(c) Sant. Varje underrrum i ett Euklidiskt rum har en ON-bas.

(d) Falskt. Att det finns färre än 5 egenvärden utesluter inte att matrisen är inverterbar (dvs att dess egenvektorer spänner upp $\mathbb{R}^5$).

(e) Sant. En matris är inte inverterbar om och endast om 0 är ett av dess egenvärden (Theorem, p.312).

(f) Sant. Inversen till A^{2007} är den 2007:te potensen av inversen till A. Alternativt kan man konstatera t.ex. att $\det(A^{2007}) = (\det A)^{2007}$, som är skild från noll om och endast om $\det A \neq 0$.

7. (a) Det är definitionerna i boken man är ute efter.

En $n \times n$ matris A sägs vara *inverterbar* (se s.119) om det finns en $n \times n$ matris B s.a. $AB = BA = I_n$. Man brukar skriva $B := A^{-1}$.

En $n \times n$ matris sägs vara *symmetrisk* (se s.449) om $A = A^T$, där transponatmatrisen erhålls genom att omvandla rader till kolumner.

(b) Vi utnyttjar faktumet (Theorem 3(d), p.115) att, för alla matriser X, Y sådan att produkten XY existerar, gäller att

$$(XY)^T = Y^T X^T. \tag{2}$$

Notera också att identitetsmatrisen är symmetrisk. Därmed har vi att (om A är $n \times n$, säg)

$$I_n = I_n^T = (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T,$$

och

$$I_n = I_n^T = (A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T.$$

Enligt definitionen av matrisinvers i del (a), innebär de två relationerna ovan att $(A^{-1})^T$ är inversen till A^T, v.s.v.

(c) Om A är symmetrisk så är $A = A^T$. Därför gäller enligt (b) att

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

dvs $(A^{-1})^T = A^{-1}$, så A^{-1} är också symmetrisk.