

1) a)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -9 \\ -6 & 9 & -19 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 9 & -19 \end{vmatrix} = -5 \cdot 19 - (-9 \cdot 9) = -14$



b)  $Pu = \frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$   
 ( $u = [1 \ 1 \ 0]^T$ )

c)  $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 linjäritet!

$F\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  Trippelpengsmatrix!  $AX=0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 = 5 + 3t \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -4t \\ x_4 = t \\ x_5 = t \end{cases}$  där  $x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Bas för  $\text{Nul}(A)$ :  
 $\left\{ [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [3 \ 0 \ -4 \ 1 \ 1]^T \right\}$

e)  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 Pivotkolonner: nr 1 och 3

Bas för  $\text{Col}(B)$  är de 1:a och 3:e kolumnerna i  $B$ , dvs  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(\text{Nul}(A)) = \# \text{kolonner} - \dim(\text{Col}(B)) = 5 - 2 = 3$

f) Multiplicera respektive vektor med  $A$ :

$A v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3v_1$ ,  $A v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \lambda v_2$ ,  $A v_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ -14 \\ -28 \end{pmatrix} = -7v_3$

$v_1$  egenvektor till egenvärdet  $3$ ,  $v_3$  egenvektor till egenvärdet  $-7$

1)  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$   
 (multiplier av elementet i rad 1)  
 (multipl. av elementet i rad 2)  
 (multiplier av elem. i rad 3)  
 Detta ger  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) a) Vi försöker lösa  $AX=b$  med eliminationsmetoder.

$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array} \right]$

Vi ser av detta att systemet skulle lösas.  
 (pivotelement i HL!)

b) MKM-tekniken är en lösning till systemet  $A^T A x = A^T b$

$[A^T A | A^T b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -7 \\ 6 & 2 & 12 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \\ 0 & -16 & 9 & -7 \end{array} \right]$

$\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array} \right]$  Entydig lösning:  $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Om vektorn  $x \in \mathbb{R}^2$  har koordinatvektorn  $[x]_B$  i basen  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  så gäller  $x = P[x]_B$  och  $[x]_B = P^{-1}x$ , där  $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$

Den linjära avbildningen  $T$  har matrisen  $M$  i standardbas och  $M_B$  (given) i basen  $B$ . Då gäller:

$T(x) = P[T(x)]_B = P M_B [x]_B = \underbrace{P M_B P^{-1}}_{=M} x$

4/ (forts) Vi behöva hitta  $P^{-1}$ !

$$[P|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right] = [5I | 5P^{-1}] \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Till sist:  $T(x) = P M_B P^{-1} x = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$

5/  $P_3 = \{ \text{alla polynom av grad } \leq 3 \}$

$U_1 = \{ p \in P_3 : p(1) = p(-1) \}$

$U_2 = \{ p \in U_1 : p(1) = 0 \}$

$p \in U_2 \iff p(1) = p(-1) = 0 \iff p(x) = (x-1)(x+1)q(x), q \in P_1$

Varje polynom i  $U_2$  kan alltså skrivas:  $p(x) = (x^2-1)(ax+b) = a(x^3-x) + b(x^2-1)$

En bas för  $U_2$  är därmed  $\{ x^3-x, x^2-1 \}$  (de är linjärt oberoende och spänner upp  $U_2$ )

Om  $p \in U_1$ , så gäller att  $p(x) - p(1) \in U_2$

Varje  $p \in U_1$  kan alltså skrivas  $p(x) = a(x^3-x) + b(x^2-1) + \underbrace{p(1)}_c$ , dvs som en linjärkombination av  $\{ x^3-x, x^2-1, 1 \}$  som är linjärt oberoende

Därmed är en bas för  $U_1$ :  $\{ x^3-x, x^2-1, 1 \}$

För att fylla ut till en bas för hela  $P_3$  gäller det att hitta ett polynom i  $P_3$  som inte ligger i  $U_1$ , t.ex.  $x$  (alla värden i 1 och -1)

Eftersom  $\dim P_3 = 4$  måste  $\{ x^3-x, x^2-1, x, 1 \}$  vara en bas för  $P_3$ .

6) a)  $M$  symmetrisk betyder:  $M^T = M$

Vi testar:  $(A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T A$  Sant!

b)  $x_1, x_2$  lösningar till  $Ax = b \implies A(0,2x_1 + 0,8x_2) = 0,2Ax_1 + 0,8Ax_2 = 0,2b + 0,8b = b$   
dvs  $0,2x_1 + 0,8x_2$  är lösning till  $Ax = b$  Sant

c) I lösningarna till  $Ax = 0$  är antalet fria variabler lika med antalet kolonner minus  $\dim \text{Col}(A)$ , vilket är minst 1 då kolonnerna i  $A$  är linjärt beroende. ( $\dim \text{Col}(A) < \text{antallet kolonner}$ )  
 $Ax = b$  kan därmed ha oändligt många lösningar eller ingen lösning, aldrig enstaka lösning. Sant

d) Finns en matris  $A$  med 7 kolonner och  $\dim \text{Nul}(A) = \dim \text{Col}(A)$ !  
Rank Theorem:  $\dim \text{Nul}(A) + \dim \text{Col}(A) = 7$  (add.!)  
(dimensionssats)  $\quad \quad \quad = \text{rank}(A)$   
Därmed kan dimensionerna aldrig vara lika! Falskt

e)  $A$  diagonaliserbar  $\iff$  det finns en egenbas för  $\mathbb{R}^n$   
 $n \times n$   
Ta  $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$  Enda egenvärde  $\lambda = 1$ , egenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
Egenrummet har dimension 1, ingen egenbas.  
 $A$  är ej diagonaliserbar. Falskt

f) Om  $A$  är en  $n \times n$ -matris med  $m < n$ , bygg ut  $A$  till en  $n \times n$ -matris  $B = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ , det  $B = 0$  (det  $A$  finns ej!)  
Då är  $A^T A = B^T B$  och  $\det(A^T A) = \det(B^T B) = (\det B)^2 = 0$