MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2006-01-13 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Elin Götmark/David Rydh, tel. 0739779268

Linjär Algebra Z1 (TMV 140))

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

---

1 Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$? (2p)

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1. Ange en motsvarande egenvektor. (2p)

(c) Avgör vilken/vilka av matriserna som är inverterbara:
$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

(d) A är matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 7 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Matlab-komandot `>> B = rref(A)` ger resultatet

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange rangen för A samt en bas för *nollrummet* till A.

(e) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(f) En linjär avbildning $\boldsymbol{F}$ från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^2$ avbildar $[1,0,0]^T$ på $[2,3]^T$, $[0,1,0]^T$ på $[0,1]^T$ och $[0,0,1]^T$ på $[2,-1]^T$. Ange avbildningsmatrisen för $\boldsymbol{F}$. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2 (a) Lös, enligt metoden med utökad matris, ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1 \end{cases}$$

(b) Bestäm x_1 med hjälp av Cramers regel. (3p)

3 Låt matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(b) Bestäm en formel för A^k. (3p)

VÄND!

4 Beräkna (med minsta kvadratmetoden) en approximativ lösning till ekvationssystemet (6p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{cases}$$

Beräkna också medelfelet.
OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

5 Med $\mathbb{P}_3$ menas det linjära rummet vars element är reella polynom av grad högst 3. Avbildningen $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ definieras av $T(p(t)) = p''(t) + p(t)$ (6p)

(a) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på den naturliga basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

(b) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$.

(c) Ange sambandet mellan de två avbildningsmatriserna med hjälp av transformationsmatrisen för basbytet $(\mathcal{B} \to \mathcal{E})$.

6 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Alla ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har parameterlösning.

(b) Om A är en 5×3 - matris så är rangen för A högst 3.

(c) Om A är en kvadratisk matris med $\det A = 0$ så är $\lambda = 0$ ett egenvärde till A

(d) Om en matris A är diagonaliserbar så är A symmetrisk.

(e) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A = A^T B$ minst en lösning.

(f) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A = A^T B$ högst en lösning.

7 (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)

(b) Bevisa att varje mängd, bestående av n linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$, spänner upp $\mathbb{R}^n$. (4p)

(c) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum av ett vektorrum. (1p)

Lycka till!
Tommy