MATEMATIK | **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2005-03-19 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Elisabeth Wulcan, tel. 0739779268

Linjär Algebra Z1 (tmv 140)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange rangen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (2p)

(b) Bestäm en bas för nollrummet, $NulA$ (A som ovan), och skriv sedan ner lösningarna till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, då $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T$. (3p)

(c) Bestäm inversen till matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(d) LU-faktorisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Om man i Matlab skriver (2p)

```
>> r = [1 1 2 2 3]; k = [1 4 1 3 5]; e = [1 2 -2 3 7];
>> S = sparse(r,k,e);
```

och till sist

```
>> A = full(S)
```

Vilken matris A erhåller vi då?

(f) Matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 2. (2p)
Bestäm motsvarande egenvektorer.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$ (4p)

(b) Antag att en partikel rör sig i ett kraftfält och att dess lägesvektor $\mathbf{x}$ satisfierar differentialekvationen $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ där A är som ovan och $\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)
Lös detta begynnelsevärdesproblem.

3. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + b \cdot t$ till följande data (6p)

t_i	-2	-1	0	1
y_i	-2	1	0	3

Beräkna också medelfelet.
OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

Var god vänd!

4. Planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm en ON-bas för planet och sedan matrisen för projektionen av en vektor $\boldsymbol{x}$ på detta plan. (6p)

5. Avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ definieras av (6p)

$$T(p(t)) = \int_0^t p(s)(s+1)ds.$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning.

(b) bestäm matrisen M för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

(c) Bestäm koordinaterna för $T(1 - 2t + 3t^2)$ i basen $\mathcal{C}$ med hjälp av en matrismultiplikation med M ovan.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om en utökad matris reduceras till trappstegsform och sista raden i denna är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ så är det associerade ekvationssystemet inte lösbart.

(b) Om A är en 3×4 matris så kan avbildningen $\boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x}$ inte vara en-entydig (injektiv).

(c) Om A ocb B båda är inverterbara $n \times n$ matriser så är $X = A^{-1}B^{-1}$ en lösning till matrisekvationen $AX = XB$.

(d) Det är möjligt att konstruera en 3×4 matris A sådan att $dim\, Col\, A = 2$ och $dim\, Nul\, A = 2$.

(e) Om kolonnerna i en $n \times n$ matris är linjärt oberoende så måste också raderna vara det.

(f) Om $A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ för alla $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbb{R}^n$, så måste kolonnerna i A vara ortonormerade.

7. Formulera och bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$. (6p)

Lycka till!
TG