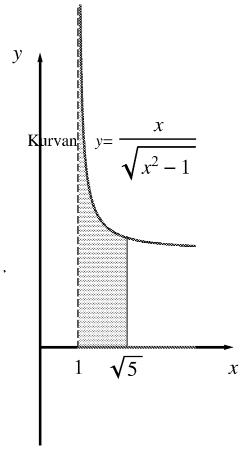
Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 2010405, f.m.



1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_1^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_1^{\sqrt{5}} = 2-0 = 2\,.$$

(b)

$$\int_0^{\pi} 3\cos^2 t\,dt = 3\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 3\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = 3\left(\frac{\pi-0}{2}+\frac{0-0}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}\,.$$

(c)

$$\text{Polynomdivision och PBU: } \frac{3x^2+x+2}{x^2+x} = 3-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x}$$

$$\int \frac{3x^2+x+2}{x^2+x}\,dx = \int\left(3-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x}\right)dx = 3x-4\ln|x+1|+2\ln|x|+C\,.$$

(d) Integralen i (a) är generaliserad eftersom integranden $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to \infty$, då $x \to 1_+$.

2. Lös differentialekvationerna...

(a) Separabel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = y^2+1 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx \Leftrightarrow \arctan y = x+C \Rightarrow y = \tan(x+C)\,.$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger att $1 = \tan C$, så att ex.vis är $C = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$, n heltal, så att $y = \tan(x+n\pi+\pi/4) = \tan(x+\pi/4)$.

(b) $y''(t)+4y'(t)+5y(t) = 0, \quad y(0) = 0\,, y'(0) = 2$, Karakteristisk ekvation $r^2+4r+5 = 0 \Leftrightarrow r = -2\pm i$, så att $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$. $y(0) = 0$ ger att $0 = A$, d.v.s. $y = Be^{-2t}\sin t$. Detta ger att

$$y' = Be^{-2t}(\cos t - 2\sin t) \text{ och } y'(0) = B = 2. \text{ Svar } y = 2e^{-t}\sin t\,.$$

(c) Linj. DE av ordning 1 med icke-konstanta koeff. och löses med I.F.

$$t\,y' + 2\,y = \frac{e^{2t}}{t} \Leftrightarrow y' + \frac{2}{t}\,y = \frac{e^{2t}}{t^2}.\ \text{I.F.} = e^{2\ln t} = t^2\,.$$

$$t^2\left(y'+\frac{2}{t}\,y\right) = t^2y'+2ty = (t^2\,y)' = t^2\cdot\frac{e^{2t}}{t^2} = e^{2t} \Leftrightarrow t^2y = \frac{1}{2}\,e^{2t}+C \Leftrightarrow y = \frac{e^{2t}+C_1}{2t^2}$$

3. Givet funktionen $h(x) := \tan^2 x\,(e^{2x}-1)$.

(a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $h(x) =: f(x)g(x)$ av grad 3... $f(x) = \tan^2 x$ är en jämn funktion, så att $f(x)$ har bara jämna potenser i sina Maclaurinpolynom.

$$f(x) = \tan^2 x \Rightarrow f(0) = 0,\ f'(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x),\ f'(0) = 0,\ f''(x) = 2\left(\tan^2 x+1\right)\left(3\tan^2 x+1\right)$$

så att $f''(0) = 2$ och $f'''(0) = 0$ eftersom $f(x)$ är jämn.

$$g(x) = e^{2x}-1,\ g(0) = 0,\ g'(x) = 2e^{2x},\ g'(0) = 2$$

$$h(x) = f(x)g(x) = (f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots)(g'(0)x+\ldots) = f''(0)g'(0)\frac{x^3}{2}+\ldots = 2x^3+\ldots$$

Därmed är polynomet $2x^3$.

(b) Gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x^3}$ är alltså

$$\frac{h(x)}{x^3} = \frac{2x^3+\ldots}{x^3} = 2+\ldots \to 2 \text{ då } x \to 0\,.$$

4. (Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\sqrt{k}}{(k+1)^2}$ är divergent eftersom termerna $a_k = \dfrac{2k\sqrt{k}}{(k+1)^2} \geq 0$ och har "gradskillnaden" mellan nämnare och täljare som är $2-3/2 = 1/2 \leq 1$.

(b)

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

och summan är en teleskopsumma.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots = \frac{1}{1} = 1\,.$$

(c) Konvergent geometrisk serie $S = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{e^2}{10}\right)^j$ eftersom $|x| = \left|\frac{-e^2}{10}\right| < \frac{3^2}{10} < 1$.

$$S = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-e^2}{10}\right)^j = -\frac{1}{1-(-e^2/10)} = -\frac{10}{e^2+10}$$

5. Givet funktionen $f(x) = \ln x$, $0 < x \leq 1$ och området i planet, som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = 1$, se figur.
Volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring

(a) $x-$axeln:

$$V_x := \pi\int_0^1 \ln^2 x\,dx = \pi\left[x\ln^2 x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = -2\pi\int_0^1 \ln x\,dx = -2\pi\left[x\ln x - x\right]_0^1 = 2\pi\,.$$

(b) $y-$axeln:

$$V_y := -2\pi\int_0^1 x\ln x\,dx = -2\pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = 0 + 2\pi\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

(c) $A := \int_0^1 2\pi x\sqrt{(1/x)^2+1}\,dx\,.$

$$\int x\sqrt{1+(1/x)^2}\,dx = \int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) + C \Rightarrow$$

$$\int_0^1 2\pi x\sqrt{(1/x)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 = \pi[\sqrt{2} + 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)]$$

6. (a)

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx \text{ där } F'(x) = f(x).$$

(b) $F'(x) \equiv f(x)$ och $g'(x)$ kontinuerliga.

(c)

$$D\,\text{VL} = f(x)g(x). \quad D\,\text{HL} = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x)$$

d.v.s. derivatorna av VL och HL är lika. Alltså är VL $=$ HL.

7. (a) För integranden gäller att

$$0 \leq \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{x^{1+3/2}} = \frac{1}{x^{5/2}},\ 5/2 = \alpha > 1 \text{ och } \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{5/2}} \text{ konvergent}\,.$$

Enligt Jämförelsekriteriet är den ursprungliga integralen också konvergent.

(b)

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{V.S. } t = \sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow x = (t^2-1)^{1/3} \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{3}\left(t^2-1\right)^{-2/3} 2t\,dt = \frac{2}{3}\frac{t}{x^2}\,dt \\ x-\text{gränser: } 1,\quad \infty \\ x-\text{gränser: } \sqrt{2},\quad \infty \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{1}{x\,t}\,\frac{t}{x^2}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{dt}{t^2-1} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left[\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{1-1/b}{1+1/b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right] = \frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)\,.$$