

Tentamen i matematik TMV 135, 20111214, f.m.

| | |
|----------------|---|
| Hjälpmedel: | Inga, formelsamling finns på baksidan |
| Telefonvakt: | Oskar Hamlet, 0703-088304 |
| Betygsgränser: | För godkänt krävs minst 20 p. Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p |
| Bonuspoäng: | Från duggor under HT 2011, LP2 |

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int \frac{x-2}{x^2+2x} dx,$

(b) $\int_0^1 4 \arctan x dx,$

(c) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt.$

9p

2. Lös differentialekvationerna

(a) $\frac{y'(x)}{y(x)^2} + x = 0, \quad y(0) = 1,$

(b) $y'(x) + 3y(x) = 3x + 1, \quad y(0) = 1,$

(c) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2e^{-t}.$

8p

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}.$$

4p

4. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $h(x) := e^{-x^2} \ln(2x+1)$ av grad 3.

(b) Bestäm $h^{(3)}(0)$.

6p

5. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{k^2 - 2k},$

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j/2},$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot (n-1)}.$

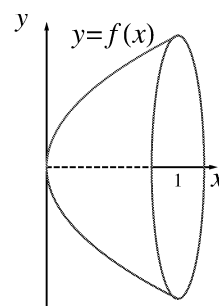
9p

6.

Givet funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Området som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = 1$. Beräkna volymen av rotationskroppen som uppstår av rotationen då området roterar kring

(a) x -axeln,

(b) y -axeln.



8p

Figur till (a)-uppgiften

7. Givet integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^\alpha + 1}}.$

(a) Visa att för $\alpha > 0$ är integralen konvergent. (Jämför, på ett korrekt sätt, integranden med potensfunktion där det finns kända resultat för konvergens och divergens.)

(b) Beräkna integralen för de α för vilka integralen är konvergent.

6p

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$