

Lösningförslag till Tentamen i matematik TMV 135, 20111214, f.m.

1. Beräkna följande integraler

(a)

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x} dx = \{PBU\} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \right) dx = A \ln x + B \ln(x+2) + C.$$

Konstanterna A och B :

$$x-2 = A(x+2)+Bx \Leftrightarrow A = -1, \quad B = 2 \Leftrightarrow \int \frac{x-2}{x^2+2x} dx = -\ln x + 2 \ln(x+2) + C.$$

(b)

$$\int 4 \arctan x dx = \{P.I.\} = 4x \arctan x - \int \frac{4x}{x^2+1} dx =$$

$$= 4x \arctan x - 2 \ln(x^2+1) + C \implies$$

$$\int_0^1 4 \arctan x dx = [4x \arctan x - 2 \ln(x^2+1)]_0^1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \ln 2 = \pi - 2 \ln 2.$$

(c)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x) \cos x dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} - \left(0 - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

2. (Lös differentialekvationerna)

(a)

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} + x = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} + x dx = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} + x dx = C \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y = \frac{2}{x^2 + C}$$

$$\text{Villkoret } y(0) = 1 \text{ ger att } 1 = \frac{2}{0+C} \Leftrightarrow C = 2, \text{ så att } y = \frac{2}{x^2 + 2}.$$

(b) Vi får $y_h = C e^{-3x}$ och $y_p = Ax + B$, som ger

$$y_p' + 3y_p = A + 3(Ax + B) = 3x + 1 \Leftrightarrow A = 1 \text{ och } B = 0$$

Alltså är

$$y = C e^{-3x} + x \text{ och } y(0) = 1 \text{ ger } 1 = C.$$

$$\text{Svar: } y = x + e^{-3x}.$$

(c)

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2e^{-t}.$$

$$y_h = \{\text{kartk. ekv } r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i\} = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t).$$

$$y_p = C e^{-t}. \text{ Insättning i DE:n:}$$

$$C e^{-t}(1 - 4 + 5) = C e^{-t} \cdot 2 = 2e^{-t} \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Svar: } y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t) + e^{-t}.$$

8p

3. (Beräkna gränsvärdet)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}.$$

$$\frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \{\text{Maclaurinutv. av täljaren}\} = \frac{1 - (1 - x^4/2! + \dots)}{x^4} = \frac{1/2 + \dots}{1} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0.$$

4p

4. (a) Maclaurinpolynom av

$$h(x) := e^{-x^2} \ln(2x+1)(1-x^2+x^4/2!+\dots)(2x-(2x)^2/2+(2x)^3/3-\dots) = 2x - 2x^2 + \frac{2x^3}{3} + \dots$$

$$\text{av grad 3 är alltså } 2x - 2x^2 + \frac{2x^3}{3}.$$

(b) $h^{(3)}(0)$ ges av

$$\frac{2}{3} = f^{(3)}(0) \cdot \frac{1}{3!} \Leftrightarrow f^{(3)}(0) = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4.$$

6p

5. (Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.)

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{k^2 - 2k}$ konvergent ty vi kan jämföra $a_k = \frac{4}{k^2 - 2k}$ med $b_k = \frac{1}{k^2}$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{1 - 2/k}{1} = \frac{4}{1} < \infty,$$

så att eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, så är denna serie konvergent. Den kan räknas ut m.h.a. PBU.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 - 2k} = 2 \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots \right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

(b) Konvergent geometrisk serie med $x = e^{-1/2} < 1$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} = e^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j/2} = e^{-1/2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e} - 1}.$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot (n-1)}$$

Termerna

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot (n-1)} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot n} = n^{-1/3-1+1/2} = n^{-5/6} \geq n^{-1} = n^{-5/6} = b_n$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent och alltså är serien divergent.

9p

Givet funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Området som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = 1$ roterar kring x -axeln.

6. (a) Volymen av rotationskroppen som uppstår av rotationen är

$$V = \pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(b) P.s.s.

$$V = \int_0^1 2\pi x |f(x)| dx = 2\pi \int_0^1 x^{3/2} dx = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \left[x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}.$$

6p

För vilka α är integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

konvergent? Uträkningar fordras.

7. Givet integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^\alpha + 1}}$.

(a)

$$0 < \frac{1}{x \sqrt{x^\alpha + 1}} \leq \frac{1}{x \sqrt{x^\alpha}} = \frac{1}{x^{1+\alpha/2}}$$

som ger en konvergent integral, om $\alpha > 0$. (Om $\alpha = 0$ får vi integranden $\frac{1}{x \sqrt{x^0 + 1}} = \frac{1}{x \sqrt{2}}$, som ger en divergent integral. Om $\alpha < 0$ får vi en integrand $\frac{1}{x \sqrt{x^\alpha + 1}} \geq \frac{1}{x \sqrt{2}}$ och alltså en divergent integral.)

(b) Vi antar alltså att $\alpha > 0$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^\alpha + 1}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x^\alpha + 1} \Leftrightarrow \\ x = (t^2 - 1)^{1/\alpha} \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{\alpha} (t^2 - 1)^{1/\alpha - 1} 2t dt \\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} (t^2 - 1)^{1/\alpha - 1} 2t dt}{(t^2 - 1)^{1/\alpha} \cdot t} =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{\alpha} [\ln(t-1) - \ln(t+1)]_{\sqrt{2}}^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{1-1/b}{1+1/b} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \right) = \frac{2}{\alpha} \ln(\sqrt{2}+1). \text{ (svar)}$$

6p