Tentamen i matematik TMV 135, 20110826, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan.
Telefon:	Reimond Emanuelsson, 772 5888/0708 948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p.
	Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2010, LP2

1. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,dx$,

   (b) $\displaystyle\int 4x \ln x\,dx$,

   (c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

   9p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $y'(x) + x\,y(x)^2 = 0, \quad y(0) = 2,$

   (b) $xy'(x) = y(x) + 1, \quad y(1) = -1,$

   (c) $y''(t) + 4y'(t) = 8e^{-2t}$.

   9p

3. Funktionerna $f(x) = x^3 \sin x - x^2$ och $g(x) = 1 - e^{x^2}$ är givna.

   (a) Beräkna gränsvärdet
   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^4}.$$

   (b) Ange Maclaurinpolynomet av $f(x)\cdot g(x)$ av grad 7.

   7p

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n}\cdot 3^n$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-n}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n}$.

   6p

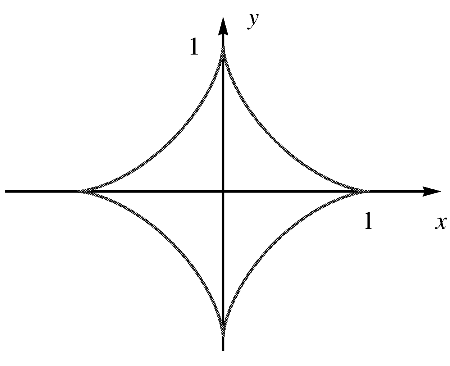
5. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

   (b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

   8p

6. För vilka reella konstanter α är integralen
   $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$
   konvergent? Motivera! Beräkna också integralen för dessa α. 5p

7. Bestäm längden av kurvan i figuren t.h. Kurvan ges av $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.



6p

Trigonometriska formler

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \ \tan y} \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

En primitiv funktion

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C
$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}
$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$
\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}
$$