TMV 135 2008-08-22

(1) a) $\int x^2 (12+x^3)^{19} dx = \frac{1}{60} (12+x^3)^{20} + C$.

b) $\int (2x+1) \ln(1+x)\, dx = (x^2+x)\ln(1+x) - \int \frac{x^2+x}{x+1} dx =$
$= (x^2+x)\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + C$

c) $\int \frac{1}{2x+x^2} dx = \frac{1}{2} \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{2+x}) dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x}{2+x}\right| + C$

(2) Kar. ekv. $r^2 + 2r + 5$ med rötter $r = -1 \pm 2i$.

Homogenlösn: $y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B \sin 2x)$

Part. lösn.: $y_p = 1$, dvs Allmän lösning är

$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 1$. $y(0) = 1$ ger $A = 0$ dvs

$y = Be^{-x}\sin 2x + 1$. Då är $y' = Be^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$

och $y'(0) = 1$ ger $B = 1/2$.

Svar: $y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + 1$

(3) $xe^{-x} = x(1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3 B(x))$ $x - x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$. Då är

$\ln(1+xe^{-x}) =$ (potenser av x över 4 går in i $O(x^4)$)

$= x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}(x-x^2)^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$

$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + O(x^4)$. $P_3(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3$

(4) Division med x: $y' + (\frac{1}{x} - 1)y = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Int. faktor: $e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} = e^{\ln x - x} = xe^{-x}$. Vi får

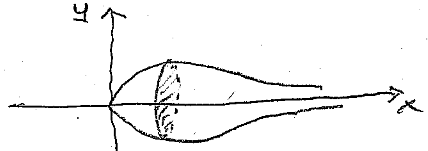
$(xe^{-x}y)' = e^{-x}$ och $xe^{-x}y = C - e^{-x}$

Allmän Lösning: $y = \frac{1}{x}(Ce^x - 1)$

$|y| \to \infty$ om $C \neq 1$, men $y \to 1$ om $C = 1$.

Svar $y = \frac{e^x - 1}{x}$

(5) Volymen är



$\int_0^\infty \pi (f(x))^2 dx =$

$= \pi \int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = \pi \left(\left[-\frac{x^2}{2} e^{-2x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-2x} dx \right) =$

$= \pi \left(0 + \left[-\frac{x}{2} e^{-2x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-2x} dx \right) =$

$= \pi \left(0 + 0 + \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^\infty \right) = \pi (0 + \frac{1}{4}) = \pi/4$

(6) $xy'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Med

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5)$ får vi

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + O(x^4)$ och

$xy'' = 2a_2 x + 6a_3 x^2 + 12 a_4 x^3 + O(x^4)$. Då är

(*) $xy'' + y = a_0 + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 6a_3)x^2 + (a_3 + 12a_4)x^3 + O(x^4)$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ger $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$

$xy'' + y = 0$ ger alla koeff. i (*) $= 0$ och därmed

$a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{12}$, $a_3 = -\frac{1}{144}$.

Svar $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{144} + O(x^5)$