LÖSNINGSFÖRSLAG
Tentamen 2007-04-14 TMV135/136.

1. Variabelbytet $t = \sin x$, och därmed $\cos x dx = dt$, ger oss

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{\mathbf{4}}.$$

2. En förberedande partialintegration ger oss $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$. Ansättningen $A/x + (Bx+C)/(x^2+1) = 1/x(x^2+1)$ ger oss att $A = 1$, $B = -1$ samt $C = 0$ så

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} dx = -\frac{\arctan \mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \ln|\mathbf{x}| - \frac{\ln(\mathbf{x^2+1})}{\mathbf{2}}.$$

3. Har att $L = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ och $f'(x) = 3\sqrt{x}$ så

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+9x} dx = \left[\frac{2[1+9x]^{3/2}}{27}\right]_0^1 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{27}}(\mathbf{10^{3/2}-1}).$$

4. Standardutvecklingar ger

$$\frac{2\arctan x - \arctan 2x}{3\sin x - \sin 3x} = \frac{2(x - x^3/3) - (2x - 8x^3/3) + O(x^4)}{3(x - x^3/6) - (3x - 27x^3/6) + O(x^4)} = \frac{2x^3 + O(x^4)}{4x^3 + O(x^4)} \to \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

5. Upprepad partialintegration ger

$$\int_0^R x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^R + \int_0^R 2xe^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^R + [-2xe^{-x}]_0^R + \int_0^R 2e^{-x} dx \to \mathbf{2}.$$

6. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har dubbelroten $r = 2$, så allmänna homogena lösningen y_h är $(Ax+B)e^{2x}$. En partikulärlösning y_p hittar vi genom ansättningen $y_p = Ce^x$, vilken ger $C = 1$ dvs $y_p = e^x$. Alltså är $y = y_h + y_p = (Ax+B)e^{2x} + e^x$ en allmän lösning. Begynnelsevillkoren ger oss att $B + 1 = 1$ samt $A + 2B + 1 = 0$, dvs $B = 0$ och $A = -1$. Alltså är $\mathbf{y = -xe^{2x} + e^x}$.

7. Insättning av $x = 0$ i ekvationen ger att $y'(0) = 0$. Derivering ger $y'' = 2x + 2yy'$, så speciellt är $y''(0) = 0$. Ytterligare en derivering ger $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Alltså är $y'''(0) = 2$. Taylors formel ger nu att $y(x) = 2x^3/3! + O(x^4) = x^3/3 + O(x^4)$. Alltså är $\lim_{x\to 0} y(x)/x^3 = \mathbf{1/3}$.

8. (a) Integalkalkylens Medelvärdessats ger oss att $h^{-1}\int_0^h f(x)dx = f(s)$ för något $s = s(h)$ mellan 0 och h. Eftersom f är kontinuerlig i $x = 0$ måste $h^{-1}\int_0^h f(x)dx = f(s) \to f(0)$ då $h \to 0$. (Detta är ett specialfall av Analysens Huvudsats.)

   (b)
```
[t,y]=ode45(@(t,y)(1-y.^2)./t.^2;[1,5],2)
```

   (c) Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens ekvationer:
   $y_1 = y,\ y_2 = y'$ ger systemet $y_1' = y_2,\ y_2' = (1-y_1^2)/t^2$,
   begynnelsevillkor: $(y_1(1), y_2(1)) = (2, 0)$.
```
[t,y]=ode45(@(t,y)[y(2);(1-y(1).^2)./t.^2],[1,5],[2,0])
```
   (Småfel med semikolon och punkter tolereras).