MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2006-08-25

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Elisabeth Vulcan, Elin Götmark, 076-272 18 60, 076-272 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Besked om rättning och granskning av tentan ges på kurshemsidan årgång 05/06.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

$$(a) \quad \int_1^2 \frac{1}{x(x-3)}dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^\pi x^2 \sin x dx$$

4+4 p

2 Lös differentialekvationen $y' + \frac{2}{x}y = x, \quad y(1) = 1$ 4 p

3 Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = \cos^2 x.$$

6 p

4 Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x \sin x}$$

6 p

5 Området som begränsas av kurvorna $y = x$, och $y = x^2$ roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den begränsade kropp som genereras. 6 p

6 Två cisterner A och B, som vardera har volymen 100 l, är förbundna med varandra genom ett rör R_2. Cisternen A är helt fylld med saltlösning, som innehåller 10 kg salt, och cisternen B är helt fylld med vatten. Då man börjar pumpa in vatten i A genom ett rör R_1 i en takt av 3 l/min, trycks saltlösning genom röret R_2 till B, varvid vätskeöverskottet rinner över kanten (volymen konstant). Saltkoncentrationen hålls likformig i var och en av cisternerna genom effektiva blandare.
a) Hur mycket salt innehåller B efter en timme? b) Vilken blir den maximala saltmängden i B och när inträffar den?

6 p

7 (a) Vad menas med *riktningsfältet* till en differentialekvation av första ordningen?

(b) Visa att $y = xe^x$ och $y = x^2e^x$ inte båda kan vara lösning till en och samma differentialekvation av första ordningen.

8 p

8 En numerisk metod för att beräkna närmevärden till integraler ges av *trapetsformeln*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{2}(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+(n-1)h) + f(a+nh))$$

där $b = a + nh$. Skriv en funktionsfil som beräknar $\int_a^b f(x)\,dx$ med hjälp av trapetsformeln.
Indata ska vara:
i) den funktion f som ska integreras,
ii) intervallets ändpunkter a och b,
iii) antalet delintervall n.
Visa också hur man kan använda detta program för att beräkna integralen $\int_0^3 \sqrt{x}e^x\,dx$

Lycka till! LF

SVAR OCH KORTA LÖSNINGSANVISNINGAR

1. (a) $-\frac{2\ln 2}{3}$ Dela upp i partialbråk $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}$ och integrera dessa.

   (b) π^2-4 Partiell integration 2 ggr. Först: integrera $\sin x$, derivera x^2.

2. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4x^2}$ Integrerande faktor x^2.

3. $y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{40}(\sin 2x-3\cos 2x)+Ae^{-2x}+Be^{x}$ Standardmetod med y_h och y_p.

4. $-\frac{1}{8}$ Antingen l'Hospital 2 ggr eller Maclaurin till x^2 plus restterm (nämnaren börjar ju med x^2).

5. $\frac{2\pi}{15}$ Skivformeln - tvärsnittsytan blir en ananasring med ytterradien x och innerradien x^2.

6. Sätt $x(t)$ och $y(t)$ lika med koncentrationen salt i behållare A resp. B.
   Formulera två begynnelsevärdesproblem:
   $x'=-\frac{3x}{100},\ x(0)=\frac{10}{100}$ och $y'=\frac{3(x-y)}{100},\ y(0)=0$

   Lös den första ODE:n och sätt in lösningen i den andra. Lös den och få $y(t)=0,003te^{-0,03t}$
   I (a), sätt in $t=60$ min, i (b) derivera $y(t)$ och sök maximum.

   (a) $18e^{-1,8}$ kg

   (b) Maximalt $10e^{-1}$ kg efter $\frac{100}{3}$ minuter.

7. (a) Se R A Adams 17.3: *slope field.*

   (b) En ODE av första ordningen kan skrivas: $y'=f(x,y)$. Om en punkt (x,y) matas in i högerledet, ger den *samma värde* på y' för *varje lösning* som går genom (x,y). De givna funktionernas grafer $y=xe^x$ och x^2e^x skär varandra i punkten $(0,0)$. Där har de dock *olika värden* på sina derivator: $y'=1$ respektive $y'=0$. (Motsvarande kan ses i den andra skärningspunkten $(1,1)$, där derivatorna är $2e$ respektive $3e$).

8. En funktionsfil *trapets* för trapetsformeln kan se ut så här:

```
function T=trapets(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a+h:h:b-h;
T=h*(f(a)/2+sum(f(x))+f(b)/2);
```

   För att beräkna $\int_0^3 \sqrt{x}e^x dx$ kan vi ge f som en anonym funktion:

```
f=@(x)sqrt(x).*exp(x);
```

   Därefter använder vi *trapets* så här (jag har valt 100 delintervall):

```
I=trapets(f,0,3,100);
```

   Många varianter finns på hur funktionsfilen skrivs, och f kan också ges genom en funktionsfil.