MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2006-04-22

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: David Rydh 0762-72 18 60, Henrik Seppänen 0762-72 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0506/
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = -xe^{-x}.$$

Ange också den lösning som uppfyller

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

6 p

2 Bestäm en primitiv funktion till funktionen $x\ln(1+x)$. 6 p

3 Lös differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = \sin x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

8 p

4 (a) Skriv ett eller flera MATLAB-kommandon som beräknar $\int_0^1 e^{t^3}dt$ (använd t ex *quad*).

(b) Skriv det MATLAB-kommando som med ode45 löser differentialekvationen i uppgift 1 i intervallet $1 \leq x \leq 2$ med begynnelsevillkoret $y(1) = e^{-1}$. Skriv också ett kommando som plottar lösningskurvan.

6 p

5 Beräkna längden av kurvan

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leq x \leq 4.$$

6 p

6 Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{2}{x^2-4}dx$$

är konvergent, och beräkna i så fall dess värde. 6 p

7 Då en cell växer, sker detta till en början så att ökningen av massan per tidsenhet är proportionell mot cellens begränsningsarea. Man kan anta att cellen är sfärisk och att dess densitet är konstant. Vid en given tidpunkt $t = 0$ är cellens massa m_0 och T tidsenheter senare är den $2m_0$. Härled en formel för cellens massa $m(t)$ som funktion av tiden t. 6 p

Var god vänd!

8 (a) Funktionen f har Maclaurinutvecklingen $f(x) = 2 - 3x^4 + O(x^5)$. Vad är $f^{(4)}(0)$?

(b) Har funktionen f i uppgift (a) ett lokalt extremvärde i $x = 0$, och i så fall av vilken typ? Förklara!

(c) Något helt annat: Beräkna

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt.$$

6 p

Lycka till! /LF

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

SVAR OCH KORTA LÖSNINGSANVISNINGAR

1. $y = xe^{-x}$ Multiplicera med integrerande faktor $\frac{1}{x}$, då blir det $\left(\frac{y}{x}\right)' = -e^{-x}$.

2. $\frac{x^2-1}{2}\ln|1+x| - \frac{(x-1)^2}{4}$ eller $\frac{x^2-1}{2}\ln|1+x| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$ (skiljer på konstant).
Partiell integration. Enklare om man väljer $\frac{x^2-1}{2}$ som primitiv funktion till x, istället för $\frac{x^2}{2}$.

3. $y = \frac{(3x-1)e^x + \cos x}{2}$ Standardmetod $y_p + y_h$, $y_h = a\sin x + b\cos x$.

4. (a)
```
quadl(@(t)exp(t.^3,0,1);
```
(b)
```
[x,y]=ode45(@(x,y)y./x-x.*exp(-x),[1,2],exp(-1));
plot(x,y)
```

5. $\frac{15}{4} + \ln 2$ Integrera $\sqrt{1+y'^2}$ mellan 1 och 4. Observera att $1 + y'^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2$.

6. Integralen är *divergent.* Dela upp i integral från 0 till 2 (integranden är odefinierad i 2) och från 2 till ∞. En primitiv funktion är $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$, som saknar ändligt gränsvärde då $x \to 2$.

7. $m = m_0\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}-1}{T}+1\right)^3$. $\frac{dm}{dt}$ är proportionell mot r^2, m är proportionell mot r^3 (r=cellens radie). Då blir $\frac{dm}{dt}$ proportionell mot $m^{\frac{2}{3}}$. Separabel ODE, lös och använd givna villkor för att uttrycka integrationskonstanten och proportionalitetskonstanten.

8. (a) $f^{(4)}(0) = -72$. Koefficienten för x^2 är $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$.
(b) Ett lokalt maximum. $x-$term saknas, dvs $f'(0) = 0$, och $f(x) - f(0) < 0$ för x nära noll.
(c) $2xe^{x^4} - e^{x^2}$. Se t ex R A Adams sid 300, längst ner.