MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2005-04-02

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Axel Målqvist, 0739-77 92 68
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Varje uppgift kan ge upp till 6 poäng, utom uppgift 8, som kan ge upp till 8 poäng.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$$

2 Bestäm en primitiv funktion till a) $x\cos x$ b) $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$

3 Lös differentialekvationen

$$xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}\quad (x>0)$$

4 a) Vad skrivs ut (=z) efter det sista av följande Matlabkommandon?

```
n=[2:8]';
x=ones(7,1);
y=(-1).^n;
z=[1;3*x+y;1]
```

b) Skriv Matlabkommandon för beräkning av

$$\sum_{k=100}^{200}\frac{1}{k^3}$$

5 Ett 100cm högt bordsben kan uppfattas som en rotationskropp, uppkommen vid rotation av kurvan $f(y)=3+\cos\frac{\pi y}{25}$, $0\le y\le 100$, (enhet cm) kring y-axeln. Beräkna bordsbenets volym.

6 Bestäm konstanterna a och b så att

$$e^x=\frac{1+ax}{1+bx}+O(x^3)\quad \text{för } x \text{ nära } 0$$

7 En sjö med den konstanta volymen V m^3 innehåller vid tiden t sekunder $Q(t)$ m^3 föroreningar jämnt fördelade i sjön med volymkoncentrationen $c(t)=\frac{Q(t)}{V}$. En å, i vilken koncentrationen av föroreningar är k, rinner ut i sjön med flödet r m^3/s och vattnet lämnar sjön med samma flöde genom dess utlopp. Dessutom tillförs på annat sätt P m^3 föroreningar per sekund.

a) Om $c(0)=c_0$, bestäm $c(t)$ och $\lim_{t\to\infty}c(t)$.

b) Om man helt upphör att tillföra sjön föroreningar (dvs $k=P=0$), hur länge dröjer det innan koncentrationen av föroreningar har halverats?

8 a) Redogör för hur man kan uppskatta en summa $\sum_{k=1}^{n}f(k)$ med hjälp av en integral. Ange lämpliga förutsättningar, rita figur och motivera uppkomna olikheter!

b) Bestäm konstanterna A, B och C så att

$$\frac{A}{n^2}+\frac{B}{n^3}<\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^3}<\frac{A}{n^2}+\frac{C}{n^3}$$

/LF

Svar

1. Gränsvärdet är 1.
2. (a) En primitiv funktion är $x \sin x + \cos x$.

   (b) En primitiv funktion är $2 \arctan \sqrt{x-1}$.
3. $y = (x^2 + \frac{C}{x})e^{-x}$
4. (a) Utskrift: en kolonnmatris med elementen 1 4 2 4 2 4 2 4 1.

   (b) T ex kan man skriva: $sum(1./[100:200].\wedge 3)$.
5. Volymen är $950\pi\ cm^3$.
6. $a = \frac{1}{2}$ och $b = -\frac{1}{2}$.
7. Differentialekvation:
$$\frac{dc}{dt} = \frac{kr + P}{V} - \frac{rc}{V}$$
   (a) Lösning med begynnelsevillkoret $c(0) = c_0$ ger
$$c(t) = k + \frac{P}{r} + (c_0 - k - \frac{P}{r})e^{-\frac{rt}{V}},$$
   med koncentrationen efter lång tid
$$\lim_{t\to\infty} c(t) = k + \frac{P}{r}$$
   (b) Lösning av differentialekvationen ovan med $k = P = 0$ ger $c(t) = c_0 e^{-\frac{rt}{V}}$.
   Ekvationen $c(T) = \frac{c_0}{2}$ ger halveringstiden $T = \frac{V \ln 2}{r}$.
8. (b) Med $f(x) = \frac{1}{x^3}$ integrerad från n till $2n$ ger jämförelsen enligt (a) den givna olikheten med
$$A = \frac{3}{8},\ B = \frac{1}{8},\ C = 1.$$