MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2004-12-18

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Leonid Gershuni, 073-977 92 68
För godkänt krävs minst 20 poäng. I dessa ingår poäng från separat Matlab-tenta (max 6 poäng).
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Varje uppgift kan ge upp till 6 poäng, utom uppgift 4, som kan ge upp till 8 poäng.
Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0405/
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

$$\int_2^4 x^3 \ln x^2 dx$$

2 Lös differentialekvationen

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

3 Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x(1 - \cos x)}$$

4 Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' - 3y = x + \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

5 Kurvan $y = \sin x$ och räta linjen $y = \frac{2x}{\pi}$ begränsar för $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ett område. Beräkna volymen av den kropp som genereras då detta område roterar kring x-axeln.

6 Kanotisten Märta paddlar över en flod, vars bredd är 100 meter. När hon startar, står hennes älskade Ture mittemot på andra stranden och väntar. Märta styr hela tiden mot den stillastående Ture, men på grund av strömmen får kanoten en annan kurs. Om Märta hela tiden håller farten 2 m/s relativt vattnet och strömhastigheten är konstant 1 m/s parallellt med stränderna, så kommer kanoten att följa en kurva $y = y(x)$ som är lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad y(100) = 0,$$

om Tures position är origo, y-axeln är riktad med strömmen längs Tures strand och x-axeln går vinkelrätt över flodfåran.

a) Härled den givna ekvationen.

b) Lös den! Ledning: gör substitutionen $z = \frac{y}{x}$.
Det går bra att bara göra uppgift b) om du inte klarat a).

7 a) Måste en integrerbar funktion vara kontinuerlig? (Integrerbar = Riemannintegrerbar).

b) Måste $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ vara kontinuerlig, om f är en integrerbar, begränsad funktion?

c) Måste $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ vara deriverbar, om f är en kontinuerlig funktion?

Motivera svaren väl! Om du hänvisar till en känd sats, behöver den inte bevisas.

Lycka till!
LF

SVAR OCH KORTA LÖSNINGSTIPS

1. Svar: $248 \ln 2 - 30$
   Partiell integration! Förenklas en liten aning av $\ln x^2 = 2 \ln x$.

2. Svar: $y = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$
   Ekvationen är separabel: dividera med $1 + y^2$ (som alltid är > 0).

3. Svar: $\frac{1}{3}$
   Maclaurinutveckla täljaren $(= \frac{x^3}{6} + O(x^5))$ och nämnaren $(= \frac{x^3}{2} + O(x^5))$, förkorta med x^3, låt $x \to 0$.

4. Svar: $y = -\frac{19}{360} e^{-3x} + \frac{3}{8} e^x - \frac{x}{3} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$
   Lös homogena ekvationen med karakteristiska rötter, bestäm en partikulärlösning till vardera $y'' + 2y' - 3y = x$ (ansätt $y_1 = ax + b$) och $y'' + 2y' - 3y = \sin x$ (ansätt $y_2 = A \sin x + B \cos x$), summera dessa och addera till homogenlösningen ($y = y_1 + y_2 + y_h$).

5. Svar: $\frac{\pi^2}{12}$
   Skivformeln: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(x)dx$, där $A(x)$ är arean av en "ananasring" med innerradien $\frac{2x}{\pi}$ och ytterradien $\sin x$.

6. b) Svar: $y = 5\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{20}$
   $y = xz$ ger $y' = xz' + z$. Den nya ekvationen $xz' = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + z^2}$, $z(100) = 0$, som är separabel.

7. a) Svar: nej!
   Ta t ex en trappfunktion med två olika värden - den är integrerbar, men inte kontinuerlig.

   b) Svar: ja!
   Visa att $\lim_{h \to 0} G(x + h) = G(x)$. Använd att $G(x + h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ och att $-M \leq f(t) \leq M$ (begränsad). Då blir ju $-M|h| \leq G(x + h) - G(x) \leq M|h|$.

   c) Svar: ja!
   Analysens huvudsats: $f(t)$ kontinuerlig $\Rightarrow G(x) = \int_a^x f(t)dt$ deriverbar med $G'(x) = f(x)$.