1. (a) Antalet sätt att välja färg är 4 och antalet sätt att välja 5 kort ur en färg är $\binom{13}{5}$. Totala antalet sätt att välja 5 kort är $\binom{52}{5}$. Således blir den sökta sannolikheten enligt multiplikationsprincipen lika med

$$4\,\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 4\,\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} = \frac{33}{16\,660} \approx 0.001981$$

(b) Det finns 13 sätt att välja den valör som man ska ha tre utav och därefter 12 sätt att välja den man ska ha två utav. Eftersom det finns fyra kort av varje valör får vi i det tredje valet $\binom{4}{3}\binom{4}{2}$ möjligheter. Den sökta sannolikheten blir

$$13\cdot 12\,\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4\,165} \approx 0.001441$$

2. Axiomen hittar du i läroboken eller på någon OH-bild från kapitel 2. Additionssatsen kan bevisas på flera sätt. Här följer ett:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \setminus A_2 \cup A_2) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2)$$

ty händelserna $A_1 \setminus A_2, A_2$ är ömsesidigt uteslutande. Vidare gäller av en analog orsak att

$$P(A_1) = P(A_1 \setminus A_2 \cup A_1 \cap A_2) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_1 \cap A_2)$$

vilket medför

$$P(A_1 \setminus A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

Nu följer

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_2)$$

v.s.v.

3. Medelst integration fås tillförlitligheten

$$R(t) = \int_t^\infty \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}\,e^{-\alpha t^\beta}\,dt = e^{-\alpha t^\beta}$$

Felintensiteten är alltså

$$\rho(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}$$

4. Skriv $E[X] = \mu_X$ och $E[Y] = \mu_Y$. Vi får, eftersom E är en linjär operator, att

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] &= E[XY - \mu_X Y - X\mu_Y + \mu_X\mu_Y] \\ &= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + \mu_X\mu_Y \\ &= E[XY] - \mu_X\mu_Y\end{aligned}$$

v.s.v (detta belönas med 2 p). Om X, Y är oberoende, gäller att $E[XY] = E[X]\,E[Y]$ och då blir kovariansen lika med 0.

5. Både momentmetoden och trolighetsmetoden talar om för oss att följande skattning är klart rimlig:
$$\hat{x}_{0.99} = \bar{x} + z_{0.99} \cdot s = 13.88 + 2.326 \cdot 2.48 = 19.65$$
Vet man inte detta måste man göra sig besväret att härleda antingen momentmetodens skattningar av μ, σ eller trolighetsmetodens. Båda metoderna skattar μ med $\bar{x}$ och σ med $\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,s$. Att byta ut den sistnämnda skattningen mot standardskattningen s av σ är både förståndigt och tidsbesparande.

6. (a) Ur formelsamlingen fås att $(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$ är χ^2-fördelad med $n-1$ frihetsgrader. Ur tabell fås att undre 5%-kvantilen är 10.117, och medelst standardomformulering av påståendet
$$P\left((n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} > 10.117\right) = 0.95$$
fås intervallskattningen $\sigma^2 < 19\,\frac{2.48^2}{10.117} = 11.55 = 3.40^2$. Svaret på deluppgiften är således $\sigma < 3.40$ minuter.

   (b) Ur faktumet att $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ är t-fördelad med $n-1$ frihetsgrader, fås formeln $\mu = \bar{x} \pm t_{0.025}(19)\, s/\sqrt{n}$ för ett konfidensintervall med den ungefärliga konfidensen 95%. Ur t-tabell fås att kvantilen $t_{0.025}(19) = 2.093$. Insättning ger nu att svaret på deluppgiften är $\mu = 13.88 \pm 1.16$ minuter.

7. Du vill visa att $\mu > 12.40$ minuter, så därför testar du $H_0 : \mu \leq 12.40$ (eller $H_0 : \mu = 12.40$) mot alternativet $H_0 : \mu > 12.40$. Teststatistikan $T = \frac{\bar{x} - 12.40}{s/\sqrt{n}}$ är $t(19)$-fördelad och har utfallet $t = \frac{13.88 - 12.40}{2.48/\sqrt{20}} = 2.669$, vilket ska jämföras med 99%-kvantilen $t_{0.99}(19) = 2.539$. Eftersom utfallet är större än kvantilen, förkastas H_0 på nivån 1%. Om du nu i en dialog med tillverkaren av säkringarna påstår att medeltiden tills dess att säkringen löser ut vid 20% överlast är > 12.40 minuter, så är risken att du har fel mindre än ca 1%.

8. Eftersom antalet försök är 100, använder vi standardmetoden som säger att $p_{16} = \hat{p}_{16} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{16}(1-\hat{p}_{16})}{n}}$. Eftersom inget är sagt om konfidensen väljer jag den till ca 95%. Då blir $\alpha = 5\%$ och $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. Insättning av punktskattningen $\hat{p}_{16} = 0.70$ och $n = 100$ ger oss svaret $p_{16} = 0.70 \pm 0.09$. Det finns ingen anledning att ge "felet" med högre noggranhet.