TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik Z, del B

Tentamen Z3 29 augusti 2003

Inga hjälpmedel är tillåtna på teoridelen, som ska lämnas in för sig.

Tillåtna hjälpmendel på problemdelen är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, kursens formel- och tabellsamling samt läroboken Feldman & Valdez-Flores: Applied Probability and Stochastic Processes.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

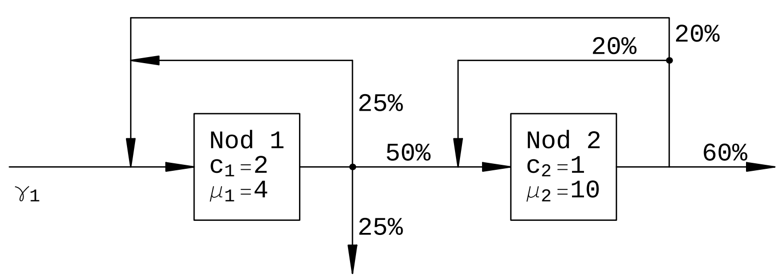
Jour och examinator är Tommy Norberg, tel. 772 3528, 0730 79 42 09.

Teoriuppgifter

1. Antag att du har en Markovkedja $X_0, X_1, \ldots$ på tillstånden A, B, C och med transitionssannolikheter $p_{AA}, p_{AB}, \ldots, p_{CC}$. Antag att $X_0 = A$ och låt $T = \min\{n : X_n \notin A\}$. Härled en formel med vilken man kan beräkna sannolikheter av typen $P(T = n)$. (4 p)

2. Härled stationär fördelning för en M/M/2/3-kö med ankomst- och betjäningsintensitet λ resp μ. (4 p)

3. Figuren nedan illustrerar ett (Markovskt) Jackson-nät. Antag att jobb anländer till nod 1 med intensiteten γ_1 st/tidsenhet. Man vill att nätet ska operera under stationära förhållanden. Hur stor kan då inintensiteten γ_1 väljas? (3 p)



Övriga uppgifter

4. Figuren ovan illustrerar också ett enkelt produktionssystem med två produktionssteg. De 25% enheter som lämnar systemet efter bearbetning i nod 1 går alla till kassation. Av de 60% som lämnar systemet efter bearbetning i nod 2 går 1/6 till kassation. Resterande 5/6 godkänns och kommer att bearbetas vidare i ett annat produktionssystem.

   (a) Hur många enheter ska processas under en arbetsdag om man vill att förväntat antal godkända ska vara 100? (2 p)

   (b) Hur många enheter ska man processa under en arbetsdag om man vill att antalet godkända ska vara minst 100 med 95% sannolikhet? (2 p)

(Vänd!)

5. En Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ har transitionsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0.85 \\ 0.21 & 0 & 0.61 & 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.13 & 0.87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Klassificera tillstånden. (3 p)

6. En av de tre s.k extremvärdesfördelningarna har fördelningsfunktionen

$$F(x) = \exp\left[-e^{-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)}\right] \quad -\infty < x < \infty$$

Här gäller att $\alpha > 0$ är en skalparameter och att β är en lägesparameter. Härled ett uttryck som omvandlar ett datorgenererat slumptal $u \in (0, 1)$ till en simulerad observation x ifrån denna extremvärdesfördelning. Vad blir x om $u = 0.894468$ och $\beta = 0, \alpha = 1$?(4 p)

7. En Markovprocess i kontinuerlig tid har generatorn

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Tillståndsrummet är $E = \{A, B, C\}$. Intäkten av processen är då den befinner sig i tillstånd A, 14 kr per tidsenhet, då den är i tillstånd B, 10 kr per tidsenhet och då den är i tillstånd C, 16 kr per tidsenhet. Varje tillståndsbyte kostar 4 kr. Beräkna processens totala kostnad per tidsenhet i det långa loppet. (4 p)

8. Modellera en liten bilverkstad med 2 reparatörer och med utrymme för högst 3 bilar som ett Markovskt kösystem. Antag att reparatörerna i medel behöver 3 timmar per reparation och att det i medel ankommer 1 bil per 2 timmar. Varje reparatör kostar 175 kr/timma och verkstaden inkl utrustning kostar i kapital och hyra 60 kr/timma. Hur stor behöver medelintäkten per bil vara för att verkstaden ska ge ett överskott? (4 p)

Lycka till!