

# TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B

Tentamen Z3 29 augusti 2002 f M

Inga hjälpmedel är tillåtna på teoridelen, som ska lämnas in för sig.

Tillåtna hjälpmedel på problemdelen är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, kursens formel- och tabellsamling samt läroboken Feldman & Valdez-Flores: Applied Probability and Stochastic Processes.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är Najaat El-Bayati, ankn 8296.

Lösningar publiceras på webben efter tentamens slut. Rättningsprotokoll publiceras på anslags-tavla i "suckarnas gång" (källaren i Matematiskt centrum) och webben senast den 6 september.

---

## Teoriuppgifter

---

1. Låt  $X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$  vara en Markovkedja med tillståndsrum  $E = \{0, 1, \dots\}$  och transitionsmatris  $\mathbf{P}$  med element  $P(i, j)$ ,  $i, j \in E$ . Visa att

$$\Pr\{X_n = j | X_0 = i\} = P^n(i, j)$$

där  $P^n(i, j)$  är elementet på rad  $i$ , kolumn  $j$  i  $\mathbf{P}^n$ . (3 p)

2. (a) Vad är en M/M/3/5-kö? (1 p)  
(b) Härled stationär fördelning för M/M/ $\infty$ -kön. Kalla betjäningssintensiteten för  $\mu$  och ankomstintensiteten för  $\lambda$ . (3 p)

3. Förklara vad ett s.k Jackson-nät är. (4 p)

---

## Problem

---

4. Ett tillverkningsystem består av tre stationer kallade  $S, M, K$ . All bearbetning påbörjas i station  $S$ . Efterföljande bearbetning sker i station  $M$  och resultatet kontrolleras i station  $K$ . Av de enheter som kontrolleras i  $K$  godkännes 60% medan 10% kasseras. Återstående 30% sänds tillbaka till station  $M$  för ny bearbetning. I medel hur många enheter kasseras i tillverkningsystemet? (4 p)

5. Beskriv hur man med hjälp av endast en normalfördelningstabell som den i formelsamlingen och en s.k slumptalsgenerator manuellt kan simulera normalfördelade slumptal. Exemplifiera din metod på slumptalet 0.846219. Ser du någon svårighet med att använda metodiken praktiskt? (4 p)

6. En Markovprocess i kontinuerlig tid har generatorn

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Tillståndsrummet är  $E = \{A, B, C\}$ . Kostnaden för processen är då den befinner sig i tillstånd  $A$ , 7 kr per tidsenhet, då den är i tillstånd  $B$ , 5 kr per tidsenhet och då den är i tillstånd  $C$ , 8 kr per tidsenhet. Varje tillståndsbyte kostar 5 kr. Beräkna processens totala kostnad per tidsenhet i det långa loppet. (4 p)

(vänd!)

7. Modellera en liten bilverkstad med  $c$  reparatörer som ett Markovskt kösystem utan begränsning på kölängden. Antag att reparatörer i medel behöver 2 timmar per reparation och att det i medel anländer 7 bilar per arbetsdag om 8 timmar.
- (a) Hur stor behöver  $c$  vara för att stationära förhållanden ska kunna uppnås? (1 p)  
Varje reparatör kostar 200 kr/timma och verkstaden inkl kapital och utrustning kostar 100 kr/timma.
- (b) Hur stor behöver medelintäkten per bil vara för att verkstaden ska ge ett överskott? (Här ska du använda det värde på  $c$  som du räknade fram i (a).) (4 p)
8. I denna uppgift ska vi modellera tillverkningsystemet ifrån uppg 4 som ett Jacksonnät. Vi tänker oss att enheter anländer till station  $S$  med intensiteten 1 enhet per tidsenhet. Alla stationerna består av en maskin utom  $K$  som består av två. Station  $S$  behöver i medel 0.9 tidsenheter per enhet medan station  $M$  behöver i medel 0.6 tidsenheter per enhet och var och en av maskinerna i station  $K$  behöver i medel 1.25 tidsenheter per enhet. Hur lång tid tillbringar en enhet i systemet i genomsnitt? (4 p)

**Lycka till!**