

TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B

Tentamen Z3 15 december 2001 e M

Inga hjälpmedel är tillåtna på teoridelen, som ska lämnas in för sig.

Tillåtna hjälpmedel på problemdelen är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, kursens formel- och tabellsamling samt läroboken Feldman & Valdez-Flores: Applied Probability and Stochastic Processes.

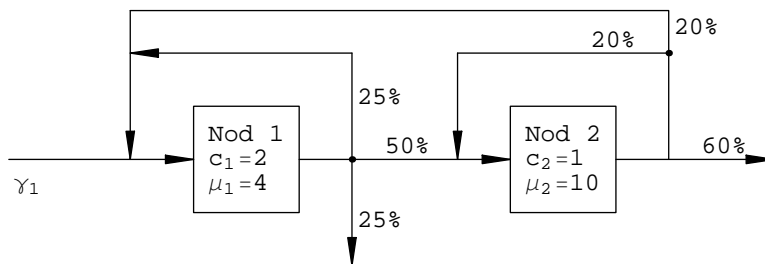
För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är Ulrica Olofsson (ankn 5336).

Lösningar publiceras på webben måndag den 17/12, 2001. Tentavisning planeras till någon av de första läsveckorna i period 3. För tid och plats, se kursens hemsida.

Teoriuppgifter

1. Betrakta en Markovkedja $X = \{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ med transitionsmatris \mathbf{P} . Antag att kedjan startar i tillståndet i , som vi förutsätter är ej absorberande. Låt T vara den första tidpunkt som kedjan inte är kvar i i , dvs $T = \min\{n : X_n \neq i\}$. Härled T 's och X_T 's respektive sannolikhetsfördelningar. (4 p)
2. Redogör för hur man kan bära sig åt för att simulera en observation x, y av ett par X, Y med täthet $f(x, y)$. Känt är hur man simulerar en-dimensionella observationer. (4 p)
3. Figuren nedan illustrerar ett Jackson-nät. Antag att jobb anländer till nod 1 med intensiteten $\gamma_1 = 5$ st/tidsenhet. Kommer den Markovprocess som beskriver hur de två köerna utvecklas i tiden någonsin att bli stationär? (4 p)



Problem

4. Figuren ovan illustrerar också ett enkelt produktionssystem med två produktionssteg. De 25% enheter som lämnar systemet efter bearbetning i nod 1 går alla till kassation. Av de 60% som lämnar systemet efter bearbetning i nod 2 går 1/6 till kassation. Resterande 5/6 godkänns och kommer att bearbetas vidare i ett annat produktionssystem. (a) Hur många enheter ska processas under en arbetsdag om man vill att förväntat antal godkända ska vara 100? (b) Hur många enheter ska man processa under en arbetsdag om man vill att antalet godkända ska vara minst 100 med 95% sannolikhet? (4 p)
5. En kontinuerlig stokastisk variabel X är GP-fördelad med parametrar $\xi \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$ om fördelningsfunktionen är

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, \quad x > 0$$

(vänd!)

Antag att X är GP-fördelad med $\xi = 2, \sigma = 5$ och låt $u = 0.1622$ vara ett slumpstal. Omvandla u till en (simulerad) observation x av X . (3 p)

6. Poissonprocessen används ofta för att modellera när i tiden ovanliga händelser inträffar. Vi ska tänka oss en teknisk konstruktion som är utsatt för belastning och antaga att tidpunkterna då belastningen går över en för konstruktionen kritisk gräns följer en Poissonprocess med intensiteten 0.15 st/vecka. Hur stor är sannolikheten att man under en åtta-veckorsperiod ser belastningen gå över den kritiska gränsen 1 gång under de tre första veckorna och 2 gånger de fem sista veckorna? (3 p)

7. En vinstgivande maskin ändrar tillstånd enligt en Markovprocess i kontinuerlig tid med generator

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

Tidsenheten är timmar. Vinsten den genererar är 10 USD/timma i tillstånd 1, 20 USD/timma i tillstånd 2 och 15 USD/timma i tillstånd 3. Men det kostar att byta tillstånd enligt följande tabell:

transition	kostnad
1 \rightarrow 2	5
1 \rightarrow 3	9
2 \rightarrow 1	2
2 \rightarrow 3	4
3 \rightarrow 1	3
3 \rightarrow 2	9

(enhet: USD). Hur mycket inbringar maskinen i genomsnitt då stationära förhållanden råder? (4 p)

8. En reparationsverkstad i en liten industri har en reparatör som i snitt klarar 2 reparationer per arbetsdag om 8 timmar. Maximalt får det plats 3 enheter i verkstaden och i snitt går det 1 timma mellan varje ankomst. Enheter som verkstaden p g a brist på utrymme inte kan ta emot måste repareras av en extern firma. I snitt kostar detta industrin 2785 kr/enhet. Det kostar 400 kr per timma om man anställer ytterligare en reparatör. Lönar detta sig? Lönar det sig att anställa två nya reparatörer till en kostnad av 800 kr per timma? (Vi antar att eventuella nya reparatörer efter en inlärningsperiod också klarar av att reparera 2 enheter per arbetsdag.) (4 p)

Lycka till!

När du lämnat in dina lösningar, använd några minuter till att besvara enkäten även om du tycker att du inte har något speciellt att säga. Det är viktigt att alla gör sin röst hörd om vi ska kunna fortsätta och utveckla kursen.