Lösningar till TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B den 15/12-01

1) Att i ej är absorberande betyder att $P(i,i) < 1$. Vi vet att $X_0 = i$, så $T \geq 1$. Vidare, $T = 1 \Leftrightarrow X_1 \neq i$. Vi har också att $T = 2 \Leftrightarrow X_1 = i, X_2 \neq i$, samt att $T = 3 \Leftrightarrow X_1 = i, X_2 = i, X_3 \neq i$, etc. Vi får $P(T = 1) = P(X_1 \neq i) = 1 - P(i,i)$ ty $X_0 = i$, $P(T = 2) = P(X_1 = i, X_2 \neq i) = P(i,i)(1 - P(i,i))$, $P(T = 3) = P(X_1 = i, X_2 = i, X_3 \neq i) = P(i,i)^2(1 - P(i,i))$, etc. Vi förstår att $P(T = n) = P(i,i)^{n-1}(1 - P(i,i))$. M a o, $T \sim \text{Geo}(1 - P(i,i))$.

För $j \neq i$ får vi nu

$$\begin{aligned} P(X_T = j) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = i) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} P(i,i)^{n-1} P(i,j) = P(i,j) \sum_{n=0}^{\infty} P(i,i)^n = P(i,j)/(1 - P(i,i)) \end{aligned}$$

Se stycket om geometrisk serie i formelsamlingen.

2) Man börjar med att simulera en observation x på X enligt X:s marginaltäthet $f(x)$, och fortsätter med att simulera en observation y på $Y|X = x$ enligt den betingade sannolikhetstätheten $f(y|x) = f(x,y)/f(x)$. Paret x, y blir då en simulerad observation på X, Y.

3) Det gäller att se ifall båda noderna klarar av sin effektiva belastning λ_1 respektive λ_2, som vi får genom att lösa

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5 + 0.25\lambda_1 + 0.2\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 0.5\lambda_1 + 0.2\lambda_2 \end{aligned}$$

Lösningen är $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 5$. Alternativt kan man skriva upp ruttmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 \\ 0.20 & 0.20 \end{bmatrix}$$

och beräkna

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 0.4 & 1.5 \end{bmatrix}$$

och konstatera från sats 5.2 att

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 0.4 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Detta betyder att nodernas respektive trafikintensiteter är $\rho_1 = \lambda_1/(2\mu_1) = 1$ och $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 = 1/2$. Men stationär fördelning för en M/M/c-kö existerar bara då dess $\rho < 1$, så detta könät kommer aldrig någonsin att kunna fungera stationärt.

4) Vi har här en Markovkedja med tillståndsrum $E = \{1, 2, k, g\}$ och transitionsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transienta tillstånd är $1, 2$ och transitionsmatrisens restriktion till dessa tillstånd är

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 \\ 0.20 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Tillstånden k, g är båda absorberande, så de bildar var sinn irreducibel delmängd av E. Den $\mathbf{b}$-vektor som svarar mot $\{g\}$ är

$$\mathbf{b}_g = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Jämför med sats 2.19. Vi räknar ut att

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 0.4 & 1.5 \end{bmatrix}$$

och enligt satsen är

$$F(1,k) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_g(1) = 0.5$$

(Korrekt uträkning av $F(1,g)$ renderar 2 p.) Antag nu att man processar n enheter. Låt X vara antalet godkända. Då är $X \sim \text{Bin}(n, 0.5)$, vilket ger att $E[X] = 0.5n$ och $\text{Var}[X] = 0.25n$.

(a) $0.5n = 100 \Rightarrow n = 200$.

(b) Medelst normalapproximation (med halvtalskorrektion) får vi sedan att

$$0.95 = P(X \geq 100) \approx 1 - \Phi\left((99.5 - 0.5n)/\sqrt{0.25n}\right)$$
$$\Rightarrow (99.5 - 0.5n)/\sqrt{0.25n} = -1.645 \Rightarrow n = 224$$

Inget poängavdrag görs för den som ej använder halvtalskorrektion och istället får $n = 225$. Den som räknar exakt bör få $P(X \geq 100) = 0.946$ då $n = 223$ och $P(X \geq 100) = 0.953$ då $n = 224$. Korrekt svar är alltså $n = 224$.

5) Enligt sats 3.1, ska u och x uppfylla $u = 1 - F(x)$ (obs att man kan lika gärna invertera $1 - F(x)$ som $F(x)$ (jämför med hur vi resonerade då $F(x) = 1 - e^{-x/\beta}$)). Vi får nu medelst enkla manipulationer att $x = \sigma(u^{-\xi} - 1)/\xi$ och stoppar vi in $u = 0.1622$ erhåller vi den simulerade observationen $x = 92.53$ av X. Den som valde att invertera $F(x)$ bör få $x = 1.062$.

6) Den sökta sannolikheten är $p = P(N_3 = 1, N_8 - N_3 = 2) = P(N_3 = 1)P(N_8 - N_3 = 2)$, där $N = (N_t, t \geq 0)$ betecknar en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 0.15$. Här gäller att $N_3 \sim \text{Poi}(3\lambda = 0.45)$, att $N_8 - N_3 \sim \text{Poi}(5\lambda = 0.75)$ och att de stokastiska variablerna $N_3, N_8 - N_3$ är oberoende. Så,
$$p = (e^{-0.45} \cdot 0.45)(e^{-0.75} \cdot 0.75^2/2) \approx 0.038$$

7) Vi börjar med att beräkna stationära fördelningen genom att plocka fram den lösning till $\mathbf{pG} = \mathbf{0}$ som satisfierar $\mathbf{p1} = 1$ ($\mathbf{1}$ är en kolumnvektor bestående av enbart 1:or). Vi får att $\mathbf{p} = [\,27 \quad 15 \quad 17\,]/59$ $\approx [\,0.4576 \quad 0.2542 \quad 0.2881\,]$ (den som klarar detta har 2 p).

Definiera inkomstvektorn $\mathbf{f} = [\,10 \quad 20 \quad 15\,]^t$. Under stationära förhållanden är förväntad inkomst från besöken i de olika tillstånden lika med $\mathbf{pf} = 825/59 \approx 13.98$ USD/timma. (Se sats 4.6.)

Definiera en matris som talar om vad de olika transitionerna kostar i USD:
$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$
Under stationära förhållanden är förväntad kostnad för transitionerna lika med $\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = 937/236 \approx 3.97$. (Se sats 4.7.) Förväntad vinst blir alltså $825/59 - 937/236 = 2363/236 \approx 10.01$ USD/timma.

8) Just nu har vi en M/M/1/3-kö med i snitt $\lambda = 8$ ankomster per dag och den enda reparatören klarar i snitt av $\mu = 2$ reparationer per dag. Sätt $r = \lambda/\mu = 4$. Stationära sannolikheterna för ett sådant system uppfyller $p_n = r^n p_0$ för $n = 1, 2, 3$. (Födelse- och dödsprocess med födelseintensiteter $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och dödsintensiteter $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$.) Så $1 = p_0(1 + r + r^2 + r^3) = 85\,p_0$ $\Rightarrow p_0 = 1/85 \Rightarrow p_3 = r^3/85 = 64/85 \approx 0.753$. I genomsnitt kostar därför de externa reparationerna $2785 \cdot 8 \cdot 64/85 \approx 16775.5$ kr/dag.

Ökar vi antalet betjänare till 2 får vi istället en M/M/2/3-kö. Genom att skriva upp hur p_n beror av p_0 för $n = 1, 2, 3$, ser vi att $p_3 = (r^3/4)/(1 + r + r^2/2 + r^3/4) = 16/29 \approx 0.552$. (D v s, $p_1 = rp_0$, $p_2 = (r^2/2)p_0$, $p_3 = (r^3/4)p_0$, ty $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och $\mu_1 = \mu$ medan $\mu_2 = \mu_3 = 2\mu$.) I genomsnitt kostar därför de externa reparationerna $2785 \cdot 8 \cdot 16/29 \approx 12292.4$ kr/dag, vilket är en minskning med $4483.12 > 3200 = 8 \cdot 400$ kr/dag. Det lönar sig alltså att anställa ytterligare en reparatör.

Ökar vi antalet betjänare till 3 får vi istället en M/M/3/3-kö. Genom att skriva upp hur p_n beror av p_0 för $n = 1, 2, 3$, ser vi att $p_3 = (r^3/6)/(1 + r + r^2/2 + r^3/6) = 32/71 \approx 0.451$. (D v s, $p_1 = rp_0$, $p_2 = (r^2/2)p_0$, $p_3 = (r^3/6)p_0$, ty $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och $\mu_1 = \mu$ medan $\mu_2 = 2\mu$ och $\mu_3 = 3\mu$.) I genomsnitt kostar därför de externa reparationerna $2785 \cdot 8 \cdot 32/71 \approx 10041.7$ kr/dag, vilket är en minskning med $6733.84 > 6400 = 8 \cdot 800$ kr/dag jämfört med M/M/1/3-kön. Det lönar sig alltså att anställa ytterligare två reparatörer.