Lösningar till Matematisk statistik för Z, del B, den 30 augusti 2001

1. Notera först att $P(X_2 = k) = \sum_j P(X_1 = j)P(X_2 = k|X_1 = j) = \sum_j P(X_1 = j)\,p_{jk}$, samt att $P(X_1 = j) = \sum_i P(X_0 = i)P(X_1 = j|X_0 = i) = \sum_i \mu_i\,p_{ij}$. Ur detta följer att $P(X_2 = k) = \sum_j \sum_i \mu_i\,p_{ij}\,p_{jk} = \mu\mathbf{P}^2(k)$.

2. Tillståndet 5 är absorberande (ty 1:an i diagonalen). Tillstånden 2 och 6 bildar en irreducibel sluten mängd (ty 6 är det enda tillstånd utöver 2 som kedjan kan hoppa till ifrån 2 och 2 är det enda tillstånd utöver 6 som kedjan kan hoppa till från 6). Tillståndet 1 är transient (ty ifrån 1 kan kedjan hoppa till det absorberande tillståndet 5). Då är också tillstånden 3 och 4 transienta (ty kedjan kan hoppa ifrån 4 till 3 och ifrån 3 till 1)).

3. Det gäller att beräkna förväntat antal besök i j givet att kedjan startar i F_1, alltså $R(F_1, j) = E[N^j|X_0 = F_1]$, för de fyra transienta tillstånden $j = F_1, S, K, F_2$. Enl "Property 2.18" ska vi införa restriktionen av $\mathbf{P}$ till $A = \{F_1, S, K, F_2\}$, alltså

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och beräkna matrisen $\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, vilket t ex kan göras genom att man löser ut $\mathbf{x}$ ur ekvationssystemet $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Jag fick att

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 10/9 & 10/9 & 1/9 \\ 0 & 10/9 & 10/9 & 1/9 \\ 0 & 1/9 & 10/9 & 1/9 \\ 0 & 10/9 & 10/9 & 10/9 \end{bmatrix}$$

I översta raden läser vi av $\mathbf{R}(F_1, F_1) = 1$, $\mathbf{R}(F_1, S) = 10/9$, $\mathbf{R}(F_1, K) = 10/9$ och $\mathbf{R}(F_1, F_2) = 1/9$. Kostnaden per tillvarkad enhet blir därför $37 + 23 \cdot 1 + 36 \cdot 10/9 + 9 \cdot 10/9 + 45 \cdot 1/9 = 115$ kr.

4. $E[\sum_{i=1}^N X_i] = \sum_n E[\sum_{i=1}^n X_i|N = n]P(N = n) = \sum_n \sum_{i=1}^n E[X_i|N = n]P(N = n) = \sum_n nE[X]P(N = n) = E[X]\sum_n nP(N = n) = \lambda E[X]$. I den tredje likheten utnyttjades oberoendet mellan N och X-sekvensen. Den första likheten är lagen om total sannolikhet uttryckt för väntevärden (se nämnaren i uttrycket för Bayes formel (sats 2.4.1 i Milton & Arnold).

5. (a) Observera att $T = 1$ omm $X_0 = 1, X_1 \neq 1$, att $T = 2$ omm $X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 \neq 1$, att $T = 3$ omm $X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 \neq 1$,etc. Därför gäller att $P(T = 1) = 0.3$, $P(T = 2) = 0.7 \cdot 0.3$, $P(T = 3) = 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.7^2 \cdot 0.3$, etc. Allmänt gäller alltså $P(T = k) = 0.7^{k-1} \cdot 0.3$. Detta är en Geometrisk fördelning med parameter $p = 0.3$.

   (b) När kedjan hoppar ifrån tillståndet 1, hoppar den till 2 med sannolikheten 0.05, till 3 med sannolikheten 0.10 och till 4 med sannolikheten 0.15. Inga andra möjligherer finns. Därför är $P(X_T = 2) = 0.05/(0.05 + 0.10 + 0.15) = 0.05/0.30 = 1/6 \approx 0.167$, $P(X_T = 3) = 0.10/(0.05+0.10+0.15) = 1/3 \approx 0.333$ och $P(X_T = 4) = 0.15/(0.05 + 0.10 + 0.15) = 1/2 = 0.5$. Detta räcker för full poäng. En formellt riktig uträkning av t ex den första sannolikheten ser ut så här:

$$P(X_T = 2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_T = 2, T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_k = 2, T = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_0 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 2) = \sum_{k=1}^{\infty} 0.7^{k-1} \cdot 0.05$$

$$= 0.05 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0.7^{k-1} = 0.05 \cdot \frac{1}{1-0.7} = \frac{1}{6} \approx 0.167$$

(c) Tillståndet 1 är transient (detta lämnar ju kedjan förr eller senare för att aldrig mer komma tillbaka), så $\pi_1 = 0$. De övriga "steady state"-sannolikheterna π_2, π_3, π_4 får vi genom att lösa

$$[\,\pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4\,] \begin{bmatrix} 0.40 & 0.60 & 0.00 \\ 0.30 & 0.20 & 0.50 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} = [\,\pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4\,]$$

så att $\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, vilket Feldman & Valdez-Flores talar om för oss i "Property 2.17". Enl Feldman & Valdez-Flores, sida 59, är lösningen $\pi_2 = 8/17 \approx 0.4706, \pi_3 = 6/17 \approx 0.3529, \pi_4 = 3/17 \approx 0.1765$.

6. Detta är en $M/M/1/4$-kö (se sida 127-129 i F & V-F). Ankomstintensiteten är $\lambda = 2/8 = 1/4$ st/timma och reparationsintensiteten är $\mu = 1/3$ st/timma, vilket ger $\rho = \lambda/\mu = 3/4$ och

$$p_4 = \frac{\rho^4(1-\rho)}{1-\rho^5} \approx 0.1037$$

(jfr formel (5.16) i F & V-F). Svaret på fråga (a) är därför $8p_4 \approx 0.83$ timmar. För att få svaret på fråga (b) beräknar vi först L enl (5.19) och sedan det sökta W enl (5.20). Vi får

$$L = \rho \frac{1 + 4\rho^5 - 5\rho^4}{(1-\rho)(1-\rho^5)} \approx 1.44 \text{ st}$$

$$W = \frac{L}{\lambda(1-p_4)} \approx 6.45 \text{ timmar}$$

7. Vi har alltså en $M/M/1$-, en $M/M/2$- och en $M/M/1$-kö kopplade i serie och en återkoppling från den mittersta $M/M/2$-kön till den första $M/M/1$-kön. Enl Jacksons sats ("Property 5.3") jobbar de tre köerna oberoende av varandra och enl sina resp stationära fördelningar i jämvikt. Vi börjar med att bestämma de effektiva ankomstintensiteterna $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ enl

$$\begin{aligned}
\lambda_A &= 8 + \lambda_A P(A,A) + \lambda_B P(B,A) + \lambda_C P(C,A) &&= 8 + \lambda_B 0.2 \\
\lambda_B &= 0 + \lambda_A P(A,B) + \lambda_B P(B,B) + \lambda_C P(C,B) &&= \lambda_A \\
\lambda_C &= 0 + \lambda_A P(A,C) + \lambda_B P(B,C) + \lambda_C P(C,C) &&= \lambda_B 0.8
\end{aligned}$$

(jfr sida 136 i F & V-F). Vi får att $\lambda_A = \lambda_B = 10$, $\lambda_C = 8$ enheter/timma. I (a) söks $L = L_A + L_B + L_C$. L_A och L_C får vi genom att räkna ut L för en $M/M/1$-kö enl formel (5.7) på s 125. För kö A är $\lambda = 10$, $\mu = 12 \Rightarrow \rho = 5/6 \approx 0.833$ och $L = L_A = (5/6)/(1/6) = 5$ st. För kö C är $\lambda = 8$, $\mu = 12.5 \Rightarrow \rho = 16/15 = 0.64$ och $L = L_C = 0.64/0.36 = 16/9 \approx 1.78$ st. Formler för M/M/c finns på s 132 (se (5.23) m fl). Antingen använder man dem eller så gör man det lättare för sig och utnyttjar resultatet i fallet $c = 2$ i övn 5.4 (c) (s 149). Jag gör det senare. För kö B gäller att $\lambda = 10$, $\mu = 6.25$, $c = 2 \Rightarrow \rho = 10/(2 \cdot 6.25) = 0.8$ och $L = L_B = (2 \cdot 0.8)/(1 - 0.8^2)$ $= 4{+}4/9 = 4.44$ st. Vi har alltså (a) att $L = L_A{+}L_B{+}L_C \approx 5{+}4.44{+}1.78 = 11.22$ st och (b) att $W = T_{\text{net}} = L/8 \approx 1.40$ timmar enl Littles formel för Jackson-nät.