Lösningar till Matematisk statistik för Z, del B, den 18 april 2001

1. $E_\mu[f(X_1)] = \sum_{j\in E} f(j)P(X_1 = j) = \sum_j f(j)\sum_i P(X_0 = i)P(X_1 = j|X_0 = i) = \sum_i \sum_j \mu(i)P(i,j)f(j) = \mu\mathbf{Pf}$

2. (a) $P(T = n) = P(X_1 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n \neq 1) = P(1,1)^{n-1}(1 - P(1,1)) = 0.8^{n-1}0.2$ för $n \geq 1$
(b) $P(X_T = i) = \sum_n P(X_T = i, T = n) = \sum_n P(X_1 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = i) = \sum_n P(1,1)^{n-1}P(1,i) = P(1,i)\sum_n 0.8^{n-1} = P(1,i)/(1-0.8) = P(1,i)/0.2$ för $i \neq 1$.
Alltså, $P(X_T = 2) = 0.04/0.2 = 1/5$, $P(X_T = 3) = 0.16/0.2 = 4/5$

3. Tillstånden 4 och 7 är absorberande (ty ettorna i diagonalen). Till tillstånden 1 och 6 kan kedjan inte återvända om den en gång lämnat dem (ty nollorna i resp kolumner), så dessa tillstånd är transienta (ty diagonalelementet < 1). Man ser också att tillstånden 5 och 8 bildar en irreducibel sluten mängd. Dessa två tillstånd är alltså recurrenta. Tillstånden 2 och 3 kan kedjan lämna utan att någonsin komma tillbaka. De är alltså transienta.

4. Tillstånden A, B, C är transienta och motsv del av transitionsmatrisen är

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0.05 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Härur fås att

$$\mathbf{I}-\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.9 & 0 \\ -0.1 & 0.95 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.16923 & 1.10769 & 0.88615 \\ 0.12308 & 1.16923 & 0.93539 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Den förväntade kostnaden per påbörjad enhet är $20R(A,A) + 10R(A,B) + 15R(A,C) = 47.75$. För (a) behöver vi också sannolikheterna för hopp till D och E,

$$\mathbf{b}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_E = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

så vi kan beräkna

$$\mathbf{Rb}_D = \begin{bmatrix} 0.79754 \\ 0.84185 \\ 0.90000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Rb}_E = \begin{bmatrix} 0.20246 \\ 0.15815 \\ 0.10000 \end{bmatrix}$$

Vi ser att (a) den förväntade proportionen godkända produkter är $F(A,D) = 0.79754 \approx 0.80$.

5. Sats 3.1 (s 83) säger att $x = F^{-1}(r)$. Men av beviset följer att man kan byta mot F mot $1 - F$, så vi utgår ifrån $r = (u/x)^\alpha$, och visar att detta är ekvivalent med $x = u/r^{1/\alpha}$. Svaret är alltså: $h(r) = u/r^{1/\alpha}$.

6. Initialfördelningen $p = [p_A\ p_B\ p_C]$ fås genom att lösa $p\mathbf{G} = 0$ och normera så att $p_A + p_B + p_C = 1$. Jag erhöll $p = [9\ 5\ 7]/21 \approx [0.4286\ 0.2381\ 0.3333]$.
Jag använder den regel för simulering av diskreta sannolikhetsfördelningar som beskrivs i avs 3.2.2 i Feldman & Valdez-Flores, vilket betyder att när jag ska simulera initialtillståndet, så är det A om slumptalet $r < 0.4286$, B om $0.4286 \leq r \leq 0.4286 + 0.2381 = 0.6667$ och C annars. När jag ska simulera hopp ur A, så

blir det till B om $r < 2/3 = 0.6667$ och C annars, etc. Observationer t på Exp(λ)-fördelningen simuleras enl formeln $t = -(1/\lambda)\ln r$ (s 89).

Det första slumptalet $r_1 = 0.3857 < 0.4286$, så initialtillståndet är A. Vi har alltså att $x_0 = A$. Uppehållstiderna i A är Exp(3)-fördelade, så i A stannar processen $t_1 = -(1/3)\ln r_2 = -(1/3)\ln 0.0014 = 2.190$ tidsenheter. Från A hoppar processen till B eller C med sannolikherna $2/3 = 0.6667$ resp $1/3 = 0.3333$ och eftersom $r_3 = 0.2298 < 0.6667$ är $x_1 = B$. Uppehållstiderna i B är Exp(5)-fördelade, så i B stannar processen $t_2 = -(1/5)\ln r_4 = -(1/5)\ln 0.9701 = 0.006$ tidsenheter. Från B hoppar processen till A eller C med sannolikheterna $4/5 = 0.8$ och $1/5 = 0.2$, och eftersom $r_5 = 0.7873 < 0.8$ så är $x_3 = A$. Där stannar processen i $t_3 = -(1/3)\ln r_6 = -(1/3)\ln 0.3515 = 0.349$ tidsenheter. Min lösning är alltså $x_0 = A, t_1 = 2.190, x_2 = B, t_2 = 0.006, x_3 = A, t_3 = 0.349$.

7. Vi har alltså en M/M/1-, en M/M/2- och en M/M/1-kö kopplade i serie. Enl Jacksons sats jobbar de tre köerna oberoende av varandra och enl sina resp stationära fördelningar i jämvikt. I (a) söks $L = L_A + L_B + L_C$. L_A och L_C får vi genom att räkna ut L för en M/M/1-kö enl formel (5.7) på s 157. För kö A är $\lambda = 8$, $\mu = 12 \Rightarrow \rho = 2/3$ och $L = L_A = (2/3)/(1/3) = 2$ st. För kö C är $\lambda = 8$, $\mu = 10 \Rightarrow \rho = 4/5$ och $L = L_C = (4/5)/(1/5) = 4$ st. Formler för M/M/c finns på s 132 (se (5.23) m fl). Antingen använder man dem eller så gör man det lättare för sig och utnyttjar resultatet i fallet $c = 2$ i övn 5.4 (c) (s 149). Jag gör det senare. För kö B gäller att $\lambda = 8$, $\mu = 5$, $c = 2 \Rightarrow \rho = 8/(2 \cdot 5) = 0.8$ och $L = L_B = (2 \cdot 0.8)/(1 - 0.8^2) \Rightarrow L_B = 4 + 4/9 = 4.44$ st. Vi har alltså (a) att $L = L_A + L_B + L_C = 2 + 4.44 + 4 = 10.44$ st och (b) att $W = T_{\text{net}} = L/8 = 1.31$ timmar enl Littles formel för Jackson-nät.