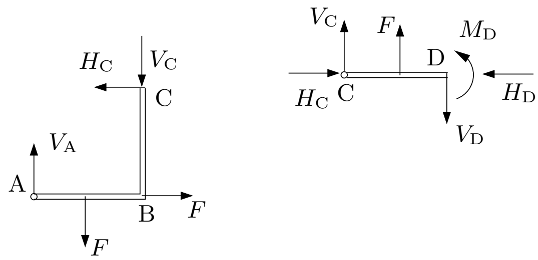
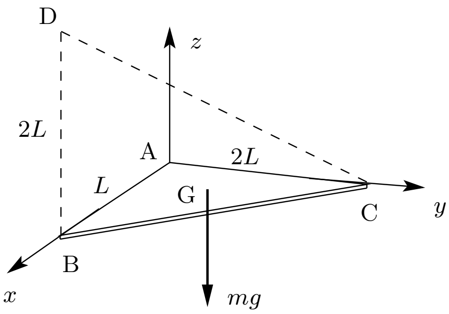
TME010 Mekanik 120830, lösningsförslag

1.



2.



a) Tyngdkraften angriper i punkten $\left(\frac{L}{3};\ \frac{2L}{3};\ 0\right)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_\mathrm{D} &= \overrightarrow{\mathrm{DG}} \times (-mg\boldsymbol{e}_z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{-2L}{3} & \frac{2L}{3} & -2L \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \\ &= \frac{mgL}{3}(-2,\ -2,\ 0).\end{aligned}$$

b)

$$M_\mathrm{CD} = \boldsymbol{M}_\mathrm{D} \cdot \boldsymbol{e}_\mathrm{CD}, \tag{1}$$

där

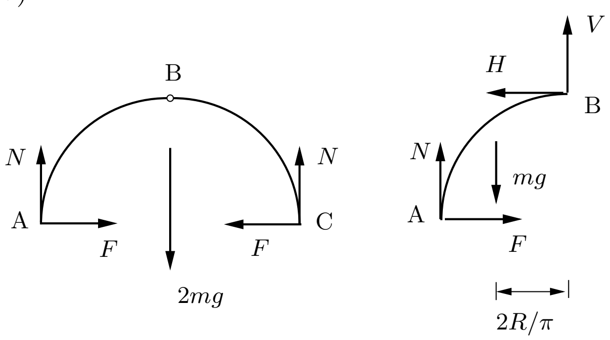
$$\boldsymbol{e}_\mathrm{CD} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|} = \frac{(L,\ -2L,\ 2L)}{\sqrt{L^2 + (-2L)^2 + (2L)^2}} = \frac{1}{3}(1,\ -2,\ 2).$$

Insättning i (1) ger

$$M_\mathrm{CD} = \frac{2}{9}mgL.$$

3.

a)



I friläggningen har utnyttjats att friktions- och normalkrafterna vid A och C är parvis lika pågrund av symmetrin. Detta är ej nödvändigt. Av symmetriskäl kan man också inse att $V = 0$.

b)

Hela strukturen:

$$\uparrow \quad 2N - 2mg = 0,$$

Stången AB:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{B}} \quad NR - mg\frac{2R}{\pi} - FR = 0.$$

Minsta möjliga friktionskoefficienten är

$$\mu_{\min} = \frac{F}{N}.$$

4.

a) Bilens accelerationskomponenter är

$$\begin{aligned} a_s &= \dot{v} = -a_0, \\ a_{\mathrm{n}} &= \frac{v^2}{R}. \end{aligned}$$

Accelerationsvektorns belopp är

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_s^2 + a_{\mathrm{n}}^2} = \sqrt{a_0^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

b) Friktionskraften är

$$F = m\,|\boldsymbol{a}| = m\sqrt{a_0^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

5.

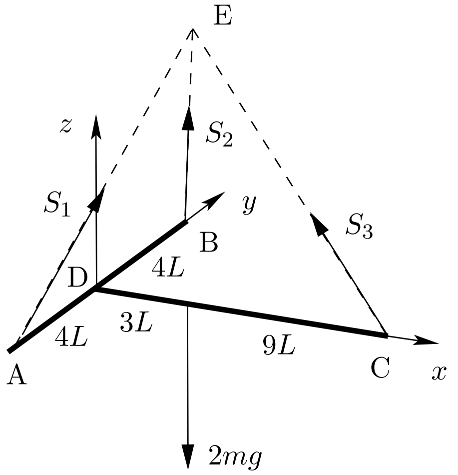
a) Formelsamling och Steiners sats ger:

$$I_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 + \frac{1}{12}m(2L)^2 + m(2L)^2 = \cdots = \frac{17}{3}mL^2.$$

b) Energikonservering ger:

$$0 = \frac{1}{2}I_{\mathrm{A}}\omega^2 - mgL - mg\cdot 2L.$$

6.



a) Kroppen påverkas av tre linkrafterna samt tyngdkraften. Verkningslinjerna för linkrafterna går alla genom upphängningspunkten E. För att momentsumman med avseende på E skall vara noll, måste även tyngdkraftens verkningslinje gå genom E, det vill säga E måste ligga rakt ovanför tyngdpunkten. Eftersom båda stängerna har samma massa, så ligger den gemensamma tyngdpunkten mitt emellan tyngdpunkterna för AB och CD, det vill säga på avståndet $3L$ från D (se figuren).
Punkten E:s koordinater är alltså $(3L;\ 0;\ 12L)$.

b)
Linkrafterna kan skrivas på vektorform som

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_1 &= S_1\frac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|} = S_1\frac{(3L,\ 4L,\ 12L)}{\sqrt{(3L)^2+(4L)^2+(12L)^2}} = \frac{S_1}{13}(3,\ 4,\ 12),\\
\boldsymbol{S}_2 &= S_2\frac{\overrightarrow{\mathrm{BE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|} = S_2\frac{(3L,\ -4L,\ 12L)}{\sqrt{(3L)^2+(-4L)^2+(12L)^2}} = \frac{S_2}{13}(3,\ -4,\ 12),\\
\boldsymbol{S}_3 &= S_3\frac{\overrightarrow{\mathrm{CE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|} = S_3\frac{(-9L,\ 0,\ 12L)}{\sqrt{(-9L)^2+(12L)^2}} = \frac{S_3}{15}(-9,\ 0,\ 12).
\end{aligned}$$

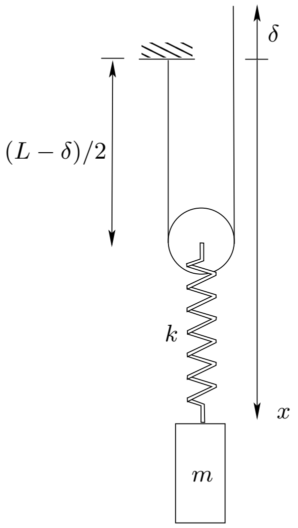
$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 &\quad\Rightarrow \frac{3}{13}S_1 + \frac{3}{13}S_2 - \frac{9}{15}S_3 = 0,\\
\Sigma F_y = 0 &\quad\Rightarrow \frac{4}{13}S_1 - \frac{4}{13}S_2 = 0,\\
\Sigma F_z = 0 &\quad\Rightarrow \frac{12}{13}S_1 + \frac{12}{13}S_2 + \frac{12}{15}S_3 - 2mg = 0.
\end{aligned}$$

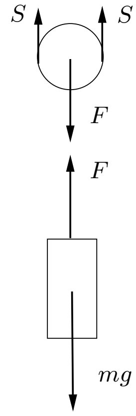
Lösning av ekvationssystemet ger

$$S_1 = S_2 = \frac{13}{12}mg, \quad S_3 = \frac{5}{6}mg.$$

7.

Om linans längd betecknas L, så ligger fjäderns övre ända på avståndet $(L-\delta)/2$ från linans fästpunkt. Fjäderns längd är då $x-(L-\delta)/2$ (se figuren).





Fjäderkraften är

$$F = k\left(x - \frac{L}{2} + \frac{\delta}{2} - b\right),$$

där b betecknar fjäderns naturliga längd.

$$\downarrow \quad mg - k\left(x - \frac{L}{2} + \frac{\delta}{2} - b\right) = m\ddot{x},$$

som ger

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{k}{2m}\delta_0 \sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + g + \frac{kL}{2m} + \frac{kb}{m}.$$

Insättning av ansatsen $x = A\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + C$ ger

$$A = \frac{\delta_0}{6} \quad \text{och} \quad C = \frac{mg}{k} + \frac{L}{2} + b.$$

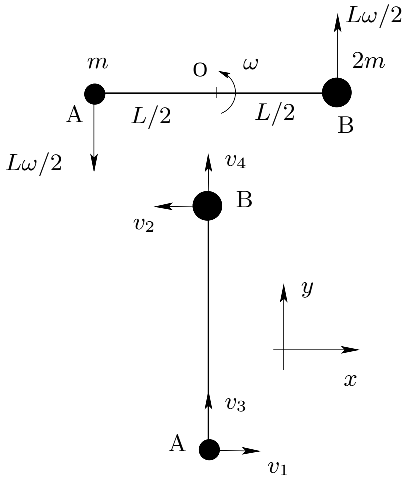
b) Eftersom trissan är lätt gäller att $F - 2S = 0$, det vill säga

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}F = \frac{k}{2}\left(x - \frac{L}{2} + \frac{\delta}{2} - b\right) = \frac{k}{2}\left(\frac{\delta_0}{6}\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{mg}{k} + \frac{L}{2} + b - \frac{L}{2} + \frac{\delta_0}{2}\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}t - b\right) = \\ &= \frac{k\delta_0}{3}\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{mg}{2}. \end{aligned}$$

Linkraftens maximala belopp är alltså

$$S_{\max} = \frac{k\delta_0}{3} + \frac{mg}{2}.$$

8.



Eftersom bordet är glatt, verkar inga yttre horisontella krafter på systemet, vilket innebär att rörelsemängden bevaras. Med figurens beteckningar gäller då:

$$\begin{aligned} 0 &= mv_1 - 2mv_2, \\ 2m\frac{L\omega}{2} - m\frac{L\omega}{2} &= mv_3 + 2mv_4. \end{aligned}$$

Eftersom A och B är förenade med en stång, måste också gälla att

$$v_3 = v_4.$$

Eftersom inga krafter uträttar arbete på systemet, bevaras energin:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{L\omega}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{L\omega}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_3^2\right) + \frac{1}{2}2m\left(v_2^2 + v_4^2\right).$$

Lösning av ekvationssystemet ger

$$v_1 = \pm\frac{2L\omega}{3}, \quad v_2 = \pm\frac{L\omega}{3}, \quad v_3 = v_4 = \frac{L\omega}{6}.$$

Här svarar minustecknen i v_1 och v_2 mot det läge där kroppen roterat tre kvarts varv.
De sökta hastighetsvektorerna är då

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = \frac{L\omega}{6}\,(4,\, 1)\,, \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \frac{L\omega}{6}\,(-2,\, 1)\,.$$