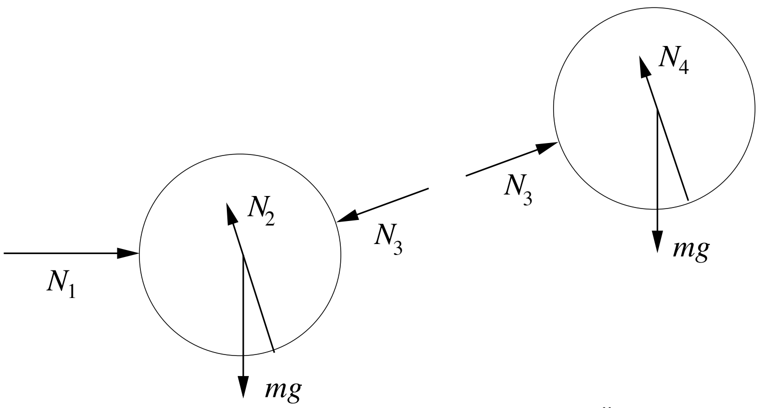
TME010 Mekanik 090827, lösningsförslag

1.



Nedre cylindern:

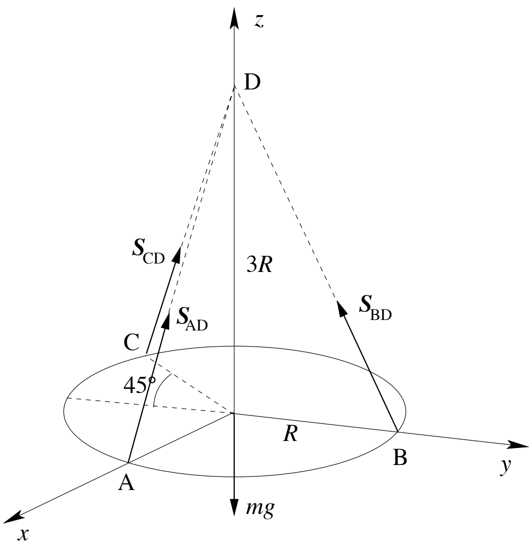
$$\nearrow \qquad N_1 \cos\alpha - N_3 - mg\sin\alpha = 0,$$
$$\searrow \qquad N_1 \sin\alpha - N_2 + mg\cos\alpha = 0.$$

Övre cylindern:

$$\nearrow \qquad N_3 - mg\sin\alpha = 0,$$
$$\nwarrow \qquad N_4 - mg\cos\alpha = 0.$$

2.

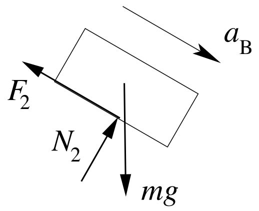
Alla linor har längden $\sqrt{10}R$ enligt Pythagoras' sats.



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{\mathrm{AD}} &= S_{\mathrm{AD}}\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} = S_{\mathrm{AD}}\frac{(-R,\,0,\,3R)}{R\sqrt{10}} = \frac{S_{\mathrm{AD}}}{\sqrt{10}}(-1,\,0,\,3),\\
\boldsymbol{S}_{\mathrm{BD}} &= S_{\mathrm{BD}}\frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|} = S_{\mathrm{BD}}\frac{(0,\,-R,\,3R)}{R\sqrt{10}} = \frac{S_{\mathrm{BD}}}{\sqrt{10}}(0,\,-1,\,3),\\
\boldsymbol{S}_{\mathrm{CD}} &= S_{\mathrm{CD}}\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} = S_{\mathrm{CD}}\frac{(\frac{R}{\sqrt{2}},\,\frac{R}{\sqrt{2}},\,3R)}{R\sqrt{10}} = \frac{S_{\mathrm{CD}}}{\sqrt{10}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}},\,3\Big).
\end{aligned}$$

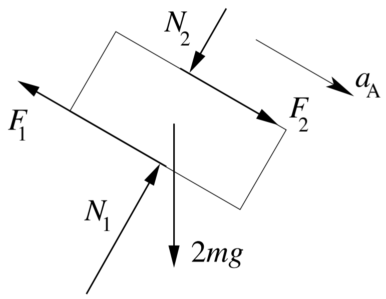
$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\frac{S_{\mathrm{AD}}}{\sqrt{10}} + \frac{S_{\mathrm{CD}}}{\sqrt{20}} = 0,\\
\Sigma F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\frac{S_{\mathrm{BD}}}{\sqrt{10}} + \frac{S_{\mathrm{CD}}}{\sqrt{20}} = 0,\\
\Sigma F_z = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{3S_{\mathrm{AD}}}{\sqrt{10}} + \frac{3S_{\mathrm{BD}}}{\sqrt{10}} + \frac{3S_{\mathrm{CD}}}{\sqrt{10}} - mg = 0.
\end{aligned}$$

3.



Kroppen B:

$$\searrow \qquad mg\sin 30^\circ - F_2 = ma_\mathrm{B},$$
$$\nearrow \qquad N_2 - mg\cos 30^\circ = 0.$$

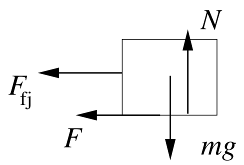


Kroppen A:

$$\searrow \qquad 2mg\sin 30^\circ - F_1 + F_2 = 2ma_\mathrm{A},$$
$$\nearrow \qquad N_1 - N_2 - 2mg\cos 30^\circ = 0.$$

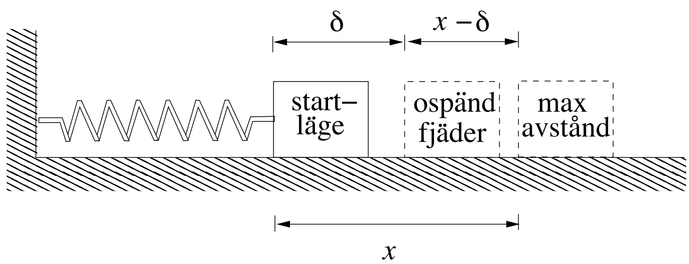
$$\text{Glidning} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{N_1} = 0,20, \quad \frac{F_2}{N_2} = 0,10,$$

4.



$$\uparrow \quad N - mg = 0.$$

$$\text{Glidning} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{N} = \mu.$$



vilket ger att $F = \mu mg$. Friktionskraften uträttar arbetet $W_\mathrm{fr} = -\mu mgx$, då kroppen glider sträckan x. Detta arbete är lika med ändringen i den mekaniska energin (= summan av kinetisk och potentiell energi), d v s

$$W_\mathrm{fr} = \Delta T + \Delta V = T_2 - T_1 + V_2 - V_1.$$

Här svarar index 1 och 2 mot startläget resp det läge där kroppen har sitt största avstånd från detta. I läge 2 har är kroppens hastighet och därmed också den kinetiska energin noll, vilket naturligtvis också gäller i startläget. Vi får då

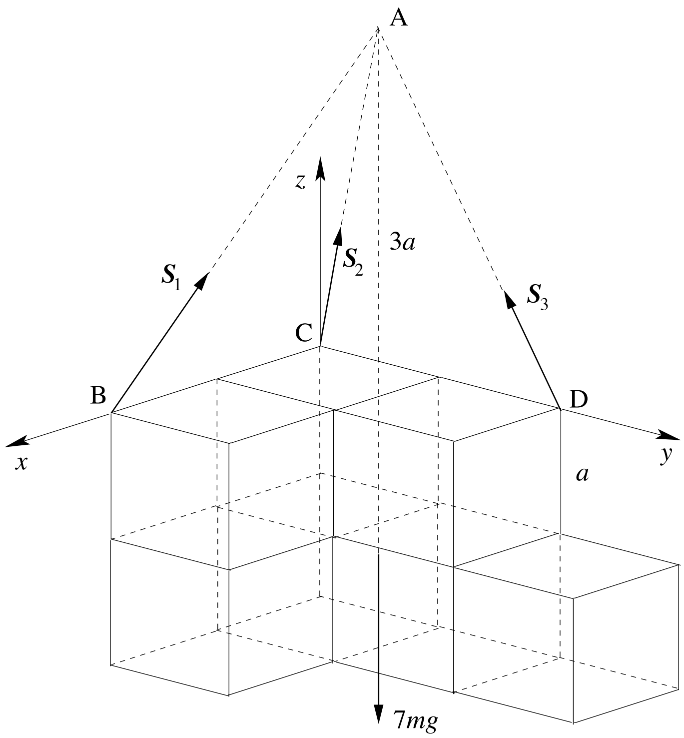
$$-\mu mgx = 0 - 0 + \frac{1}{2}k(x-\delta)^2 - \frac{1}{2}k\delta^2.$$

5.

Med hjälp av formelsamling och Steiners sats fås

$$I_x = \bar{I}_x + m\left(\frac{3h}{4}\right)^2 = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 + \frac{9}{16}mh^2 = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2.$$

6.



Kroppen påverkas av tre linkrafter och tyngdkraften. Verkningslinjerna för linkrafterna går alla genom A. Vid jämvikt är momentsumman med avseende på A noll. Detta betyder att även tyngdkraftens verkningslinje måste gå genom A, d v s tyngdpunkten ligger rakt under A. Tyngdpunktens koordinater fås som:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2m \cdot \frac{3a}{2} + 5m \cdot \frac{a}{2}}{7m} = \frac{11}{14}a,\\ \bar{y} &= \frac{m \cdot \frac{5a}{2} + 2m \cdot \frac{3a}{2} + 4m\frac{a}{2}}{7m} = \frac{15}{14}a.\end{aligned}$$

Därmed kan linkrafterna uttryckas på vektorform:

$$\boldsymbol{S}_1 = S_1\boldsymbol{e}_{\mathrm{BA}} = S_1\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}, \quad \boldsymbol{S}_2 = S_2\boldsymbol{e}_{\mathrm{CA}} = S_2\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}, \quad \boldsymbol{S}_3 = S_3\boldsymbol{e}_{\mathrm{DA}} = S_3\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|}.$$

Här är

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}} &= \left(\frac{11}{14}a - 2a,\ \frac{15}{14}a,\ 3a\right) = \left(-\frac{17}{14}a,\ \frac{15}{14}a,\ 3a\right) &&\Rightarrow\ |\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = \cdots = \frac{\sqrt{2278}}{14}a,\\ \overrightarrow{\mathrm{CA}} &= \left(\frac{11}{14}a,\ \frac{15}{14}a,\ 3a\right) &&\Rightarrow\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \cdots = \frac{\sqrt{2110}}{14}a,\\ \overrightarrow{\mathrm{DA}} &= \left(\frac{11}{14}a,\ \frac{15}{14}a - 2a,\ 3a\right) = \left(\frac{11}{14}a,\ -\frac{13}{14}a,\ 3a\right) &&\Rightarrow\ |\overrightarrow{\mathrm{DA}}| = \cdots = \frac{\sqrt{2054}}{14}a,\end{aligned}$$

Insättning i uttrycken för linkrafterna ger efter förenkling:

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{S_1}{\sqrt{2278}}(-17,\ 15,\ 42), \quad \boldsymbol{S}_2 = \frac{S_2}{\sqrt{2110}}(11,\ 15,\ 42), \quad \boldsymbol{S}_3 = \frac{S_3}{\sqrt{2054}}(11,\ -13,\ 42).$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{17}{\sqrt{2278}}S_1 + \frac{11}{\sqrt{2110}}S_2 + \frac{11}{\sqrt{2054}}S_3 = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{\sqrt{2278}}S_1 + \frac{15}{\sqrt{2110}}S_2 - \frac{13}{\sqrt{2054}}S_3 = 0,$$

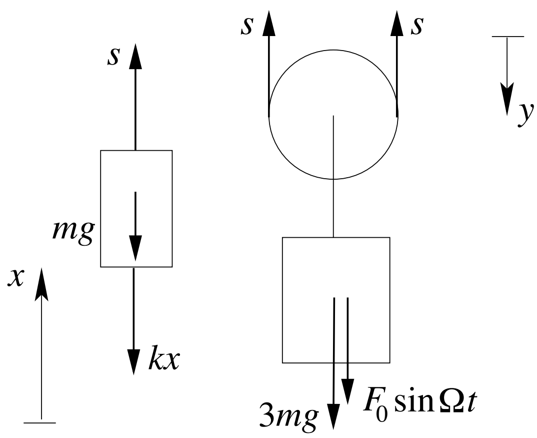
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{42}{\sqrt{2278}}S_1 + \frac{42}{\sqrt{2110}}S_2 + \frac{42}{\sqrt{2054}}S_3 - 7mg = 0.$$

Lösning av ekvationssystemet ger efter förenkling:

$$S_1 = \frac{11\sqrt{2278}}{168}mg \approx 3,13mg, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2110}}{84}mg \approx 0,57mg, \quad S_3 = \frac{5\sqrt{2054}}{56}mg \approx 4,05mg.$$

Om så önskas kan dessa uttryck sättas in i vektoruttrycken ovan, vilket ger krafterna på vektorform.

7.



Kroppen A:

$$\uparrow \quad S - mg - kx = m\ddot{x}.$$

Kroppen B:

$$\downarrow \quad 3mg + F_0 \sin \Omega t - 2S = 3m\ddot{y}.$$

Kinematiskt samband: $x = 2y \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \frac{1}{2}\ddot{x}$.
Eliminering av S och $\ddot{y}$ ger en differentialekvation förx:

$$\ddot{x} + \frac{4k}{7m}x = \frac{2F_0}{7m}\sin \Omega t + \frac{2}{7}g.$$

Ansatsen

$$x = A \sin \Omega t + B$$

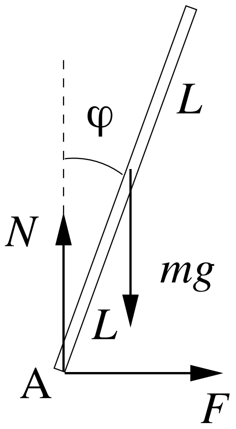
ger efter insättning och identifiering att

$$A = \frac{2F_0}{4k - 7m\Omega^2},$$

vilket är den sökta amplituden, egentligen

$$A = \frac{2F_0}{|4k - 7m\Omega^2|}.$$

8.



Så länge inte stången glider i kontaktpukten A, roterar den kring en fix axel.

$$\swarrow \quad mg\cos\varphi - N\cos\varphi - F\sin\varphi = m\bar{a}_{\mathrm{n}} = mL\dot{\varphi}^2, \quad (1)$$
$$\searrow \quad mg\sin\varphi - N\sin\varphi + F\cos\varphi = m\bar{a}_s = mL\ddot{\varphi}, \quad (2)$$
$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} \quad mgL\sin\varphi = I_{\mathrm{A}}\ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Den enda kraft som uträttar arbete under rörelsen är tyngdkraften, vilket betyder att energin konserveras:

$$mgL = \frac{1}{2}I_{\mathrm{A}}\dot{\varphi}^2 + mgL\cos\varphi. \quad (4)$$

Tröghetsmomentet I_{A} fås ur formelsamling som

$$I_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2.$$

Insättning i (3)-(4) ger

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{3g}{4L}\sin\varphi, \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{3g}{2L}(1-\cos\varphi). \end{aligned}$$

Insättning av uttrycken för $\ddot{\varphi}$ och $\dot{\varphi}^2$ i ekv (1)-(2) ger därefter ett ekvationssystem för F och N som funktioner av φ. Vi vet att då $\varphi = 45^\circ$ börjar stången glida, d v s då är $F = \mu N$, vilket ger ett ekvationssystem med N och μ som obekanta. Lösningen är

$$\mu = \cdots = \frac{9-6\sqrt{2}}{11-6\sqrt{2}} \approx 0,20.$$