TME010 Mekanik 090417, lösningsförslag

1.

a) Momentsumman med avseende på punkten P är

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{M},$$

där $\boldsymbol{F} = (0,\, F,\, 0)$ och $\boldsymbol{M} = (0,\, 0,\, -M)$.

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{P}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ L & L & -L \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} + (0,\, 0,\, -M) = (FL,\, 0,\, FL - M).$$

b) Momentsumman med avseende på axeln PQ är lika med

$$\Sigma M_{\mathrm{PQ}} = \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}},$$

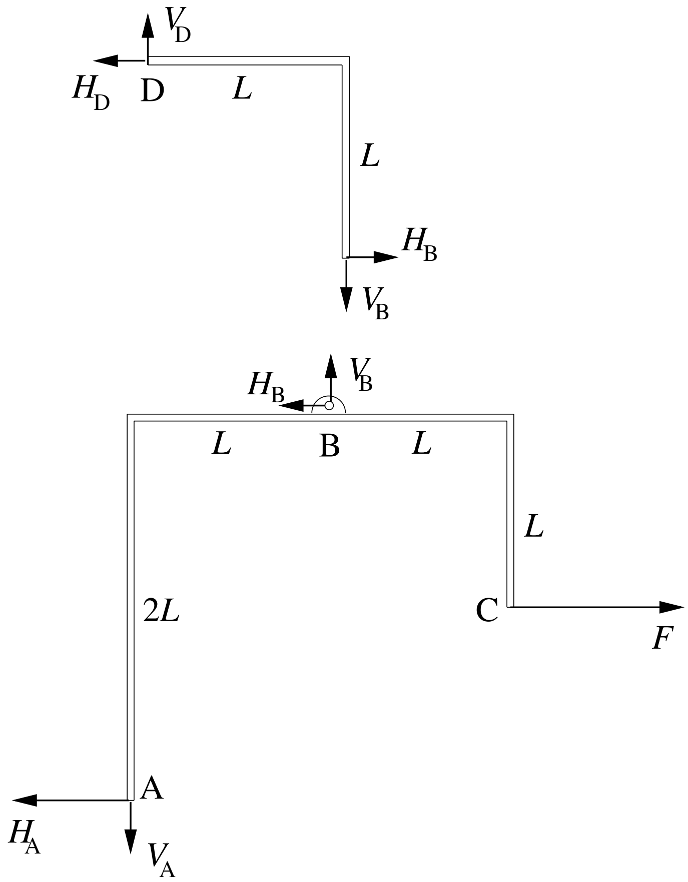
där $\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}}$ är en enhetsvektor längs PQ. Denna fås som

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = \frac{(L,\, L,\, -L)}{\sqrt{L^2 + L^2 + (-L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\, 1,\, -1).$$

Insättning ger

$$\Sigma M_{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(FL,\, 0,\, FL - M) \cdot (1,\, 1,\, -1) = \cdots = \frac{M}{\sqrt{3}}.$$

2.



Eftersom stången BD påverkas av ett tvåkraftsystem (en kraft i B och en i D), så kan kraftkomposanterna i B och D ersättas av sina resultanter, som måste ligga längs BD.

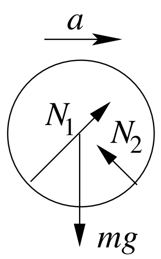
Stången ABC:

$$
\begin{array}{ll}
\uparrow & V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} = 0, \\
\rightarrow & F - H_A - H_B = 0, \\
\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{A}} & V_{\mathrm{B}}L + H_B \cdot 2L - FL = 0.
\end{array}
$$

Stången BD:

$$
\begin{array}{ll}
\uparrow & V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{B}} = 0, \\
\rightarrow & H_B - H_D = 0, \\
\overset{\curvearrowright}{\mathrm{B}} & V_{\mathrm{D}}L - H_D L = 0.
\end{array}
$$

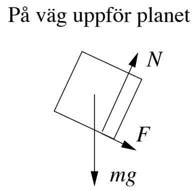
3.

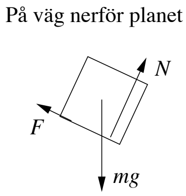


$$\uparrow \qquad \frac{N_1}{\sqrt{2}} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} - mg = 0,$$

$$\rightarrow \qquad \frac{N_1}{\sqrt{2}} - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = ma.$$

4.





$$\nearrow \qquad N - mg\cos\alpha = 0.$$

Vid glidning är

$$\frac{F}{N} = \mu,$$

vilket ger

$$F = \mu mg\cos\alpha.$$

För rörelsen uppför planet ger lagen för kinetiska energin:

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = (-F - mg\sin\alpha)L.$$

Här är L det sökta avståndet mellan P och Q.
För rörelsen utför planet ger lagen för kinetiska energin:

$$\frac{mv_1^2}{2} = (-F + mg\sin\alpha)L.$$

Här är v_1 den sökta farten i P.

5.

Med hjälp av formelsamling och Steiners sats fås:
För konen

$$I_z = \frac{3}{10}mR^2. \qquad I_x = \overline{I}_x + m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mh^2 + \frac{9}{16}mh^2 = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2.$$

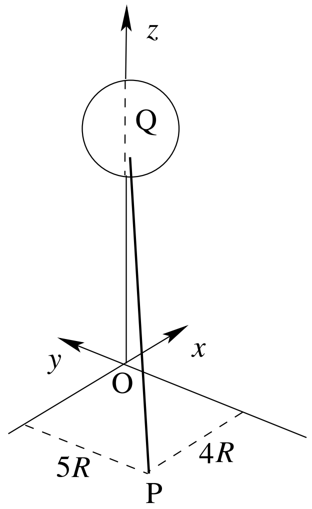
För halvsfären

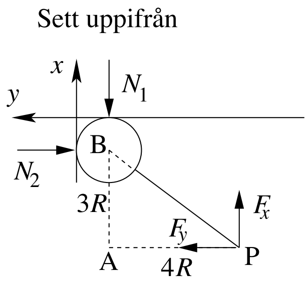
$$I_z = \frac{2}{5}mR^2. \qquad I_x = \overline{I}_x + m\left(\frac{3}{8}R + h\right)^2 = \frac{83}{320}mR^2 + m\left(\frac{3}{8}R + h\right)^2.$$

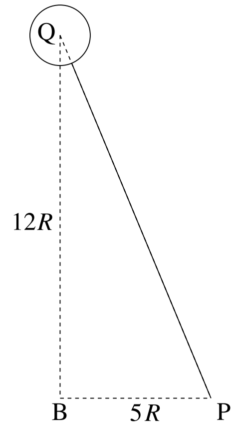
För den sammansatta kroppen fås då

$$I_z = \frac{7}{10}mR^2. \qquad I_x = \frac{131}{320}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 + m\left(\frac{3}{8}R + h\right)^2.$$

6.



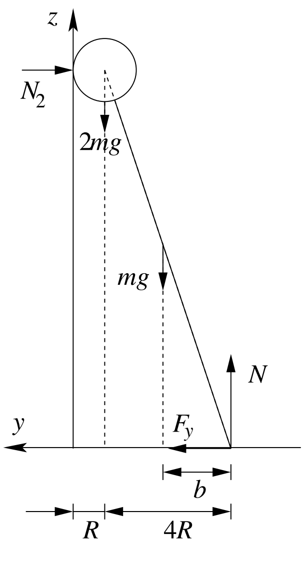


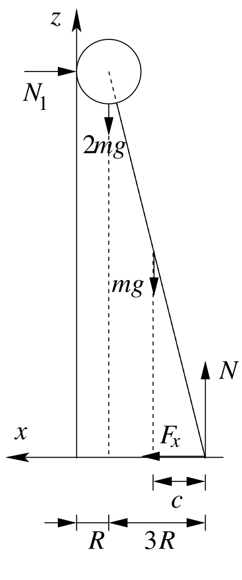


I figurerna ovan är Q sfärens medelpunkt, och B är den punkt på golvet som ligger rakt under Q. Med hjälp av Pythagoras' sats finner man att sträckan BP är $5R$. Eftersom PQ är $13R$, så måste BQ vara $12R$, även detta enligt Pythagoras.

Figurerna nedan visar kroppen ur två olika perspektiv. Eftersom stångens tyngdpunkt ligger på 6/13 av sträckan PQ från P räknat finner man med hjälp av likformiga trianglar att

$$b = \frac{6}{13} \cdot 4R \quad \text{och} \quad c = \frac{6}{13} \cdot 3R$$





$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 &\quad \Rightarrow \quad F_x - N_1 = 0, \\
\Sigma F_y = 0 &\quad \Rightarrow \quad F_y - N_2 = 0, \\
\Sigma F_z = 0 &\quad \Rightarrow \quad N - mg - 2mg = 0, \\
\Sigma M_x = 0 &\quad \Rightarrow \quad 2mgR + mg(5R - b) - N \cdot 5R + N_2 \cdot 12R = 0, \\
\Sigma M_y = 0 &\quad \Rightarrow \quad 2mgR + mg(4R - c) - N \cdot 4R + N_1 \cdot 12R = 0.
\end{aligned}$$

Lösning av ekvationssystemet ger:

$$N = 3mg, \quad F_x = N_1 = \cdots = \frac{8}{13}mg, \quad F_y = N_2 = \cdots = \frac{32}{39}mg.$$

Totala friktionskraften är

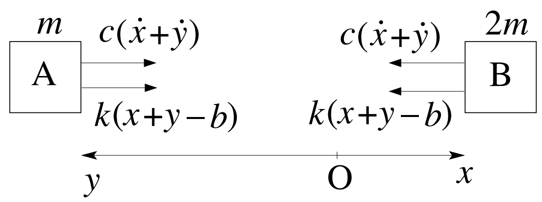
$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \cdots = \frac{40}{39}mg,$$

vilket ger att minsta möjliga värdet på friktionskoefficienten är

$$\mu_{\min} = \frac{|\boldsymbol{F}|}{N} = \frac{40}{117} \approx 0,34.$$

7.

Eftersom inga yttre krafter verkar på systemet A+ B, så måste den gemensamma tyngdpunkten O vara fix. Eftersom B:s massa är dubbelt så stor som A:s, så är $y = 2x$.



För kroppen B gäller då

$$\rightarrow \quad -k(x + y - b) - c(\dot{x} + \dot{y}) = 2m\ddot{x}.$$

Insättning av $y = 2x$ och $c = 0,5\sqrt{km}$ ger

$$\ddot{x} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x} + \frac{3k}{2m}x = \frac{kb}{2m}.$$

Substitutionen

$$2\zeta\omega = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{och} \quad \omega^2 = \frac{3k}{2m}$$

ger

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \quad \text{och} \quad \zeta = \sqrt{\frac{3}{32}}.$$

Enligt formelsamling kan den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation skrivas:

$$x_{\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\zeta\omega t}[C_1 \sin\omega_{\mathrm{d}}t + C_2 \cos\omega_{\mathrm{d}}t].$$

Här är $\omega_{\mathrm{d}} = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$.
Tillsammans med partikulärlösningen $x_{\mathrm{p}} = b/3$ fås

$$x = \mathrm{e}^{-\zeta\omega t}[C_1 \sin\omega_{\mathrm{d}}t + C_2 \cos\omega_{\mathrm{d}}t] + \frac{b}{3}.$$

Man inser att fjädern är som längst i startögonblicket och som kortast efter en halv period, d v s då

$$\omega_{\mathrm{d}} t = \pi.$$

Motsvarande värde på x är

$$x_{\mathrm{min}} = -\mathrm{e}^{-\zeta\pi\omega/\omega_{\mathrm{d}}} C_2 + \frac{b}{3}.$$

Konstanten C_2 bestäms av begynnelsevillkoret $x = 11b/30$ för $t = 0$, vilket ger

$$C_2 = \frac{b}{30},$$

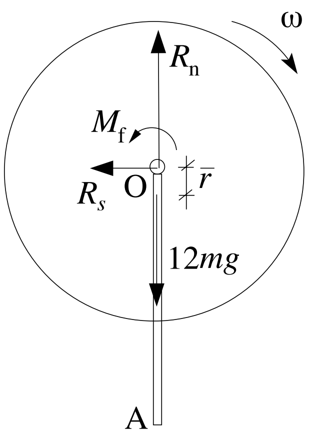
som ger

$$x_{\mathrm{min}} = \frac{b}{3}\Big(1 - \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\Big).$$

Insättning av uttrycket för ζ ger att minsta fjäderlängden $L_{\mathrm{min}} = 3x_{\mathrm{min}}$ är

$$L_{\mathrm{min}} = b - b\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{3/29}} \approx 0,96b.$$

8.



$$\uparrow \qquad R_\mathrm{n} - 12mg = 12m\bar{a}_\mathrm{n} = 12m\bar{r}\omega^2,$$
$$\leftarrow \qquad R_s = 12m\bar{a}_s = 12m\bar{r}\dot{\omega}.$$

Här är tyngdpunktsavståndet $\bar{r} = R/12$.

$$\overset{\frown}{\mathrm{O}} \qquad -M_\mathrm{f} = I_\mathrm{O}\dot{\omega}.$$

Lagen för kinetiska energin ger

$$-M_\mathrm{f}\frac{\pi}{2} + mgR = \frac{1}{2}I_\mathrm{O}\omega^2.$$

Här är tröghetsmomentet

$$I_\mathrm{O} = \frac{1}{2}\cdot 11mR^2 + \frac{1}{3}m(2R)^2 = \frac{41}{6}mR^2.$$

Ur ekvationerna ovan fås

$$R_\mathrm{n} \;=\; \cdots = \frac{504}{41}mg - \frac{6\pi}{41}\cdot\frac{M_\mathrm{f}}{R},$$
$$R_s \;=\; \cdots - \frac{6M_\mathrm{f}}{41R}.$$