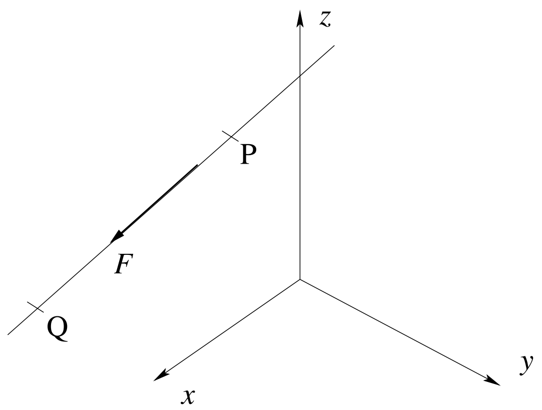
TME010 Mekanik 080828, lösningsförslag

1.



Kraften kan uttryckas på vektorform som

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}},$$

där $\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}}$ är en enhetsvektor längs verkningslinjen, d v s

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|},$$

där

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2L,\ -4L\ -L) - (L,\ -L,\ 3L) = (L,\ -3L,\ -4L).$$

Därmed är

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_{\mathrm{PQ}} = F\frac{(1,\ -3,\ -4)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2}}.$$

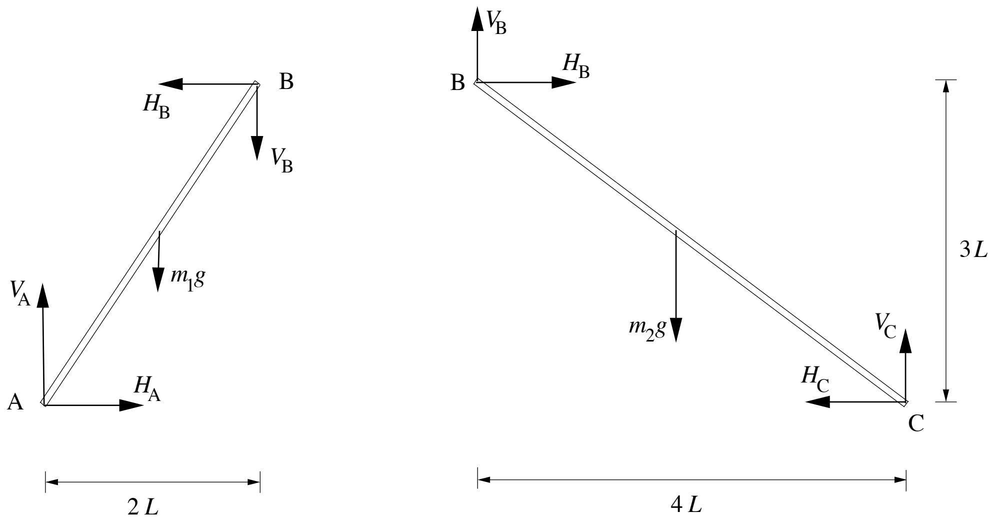
eller

$$\boldsymbol{F} = \frac{F}{\sqrt{26}}(1,\ -3,\ -4).$$

Speciellt gäller att

$$F_y = -\frac{3F}{\sqrt{26}}.$$

2.



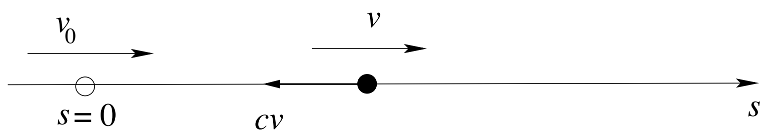
Stången AB:

$$\begin{array}{ll} \uparrow & V_\mathrm{A} - m_1 g - V_\mathrm{B} = 0, \\ \rightarrow & H_A - H_B = 0, \\ \overset{\curvearrowright}{\mathrm{A}} & m_1 g L + V_\mathrm{B} \cdot 2L - H_B \cdot 3L = 0. \end{array}$$

Stången BC:

$$\begin{array}{ll} \uparrow & V_\mathrm{B} - m_2 g + V_\mathrm{C} = 0, \\ \rightarrow & H_B - H_C = 0, \\ \overset{\curvearrowright}{\mathrm{B}} & m_2 g \cdot 2L - V_\mathrm{C} \cdot 4L + H_C \cdot 3L = 0. \end{array}$$

3.

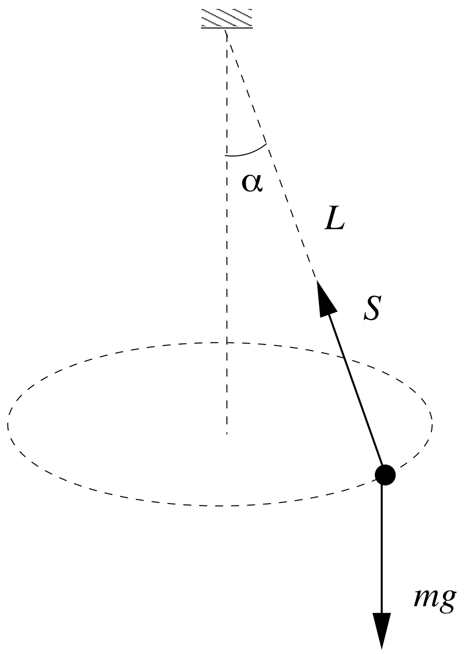


a) $\Sigma F_s = ma_s \quad \Rightarrow \quad -cv = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\dfrac{c}{m}v.$

b) $a = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{c}{m}.$

c) $\displaystyle\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = -\frac{c}{m}\int_0^s \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad v = v_0 - \frac{c}{m}s.$

4.

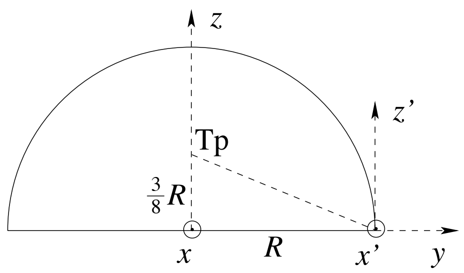


$$\uparrow \qquad S\cos\alpha - mg = 0,$$

$$\leftarrow \qquad S\sin\alpha = ma_{\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{L\sin\alpha}.$$

Här är v den sökta farten, och $L\sin\alpha$ är cirkelbanans radie.

5.



Ur formelsamling fås:

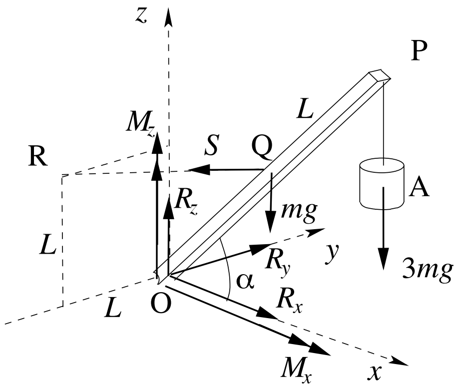
$$I_x = I_z = \frac{2}{5}mR^2.$$

Steiners sats ger:

$$I_{x'} = \frac{83}{320}mR^2 + m\left(\left(\frac{3}{8}R\right)^2 + R^2\right) = \cdots = \frac{7}{5}mR^2.$$

$$I_{z'} = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2.$$

6.



a) Linkraften uttrycks först på vektorform.

$$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{e}_{\mathrm{QR}} = S\frac{\overrightarrow{\mathrm{QR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|} = S\frac{(-L\cos\alpha,\ -L,\ L-L\sin\alpha)}{L\sqrt{\cos^2\alpha+1+(1-\sin\alpha)^2}} =$$

$$= \frac{S}{\sqrt{3-2\sin\alpha}}(-\cos\alpha,\ -1,\ 1-\sin\alpha).$$

Linkraftens moment med avseende på origo fås som

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\times\boldsymbol{S} = \frac{S}{\sqrt{3-2\sin\alpha}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -L & L \\ -\cos\alpha & -1 & 1-\sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{SL}{\sqrt{3-2\sin\alpha}}(\sin\alpha,\ -\cos\alpha,\ -\cos\alpha).$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{SL\cos\alpha}{\sqrt{3-2\sin\alpha}} + mgL\cos\alpha + 3mg\cdot 2L\cos\alpha = 0,$$

vilket ger

$$S = 7mg\sqrt{3-2\sin\alpha}.$$

b)

$$\Sigma M_x = 0: \qquad M_x + \frac{SL\sin\alpha}{\sqrt{3-2\sin\alpha}} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_x = \cdots = -7mgL\sin\alpha.$$

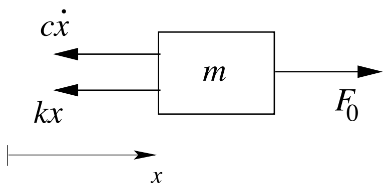
$$\Sigma M_z = 0: \qquad M_z - \frac{SL\cos\alpha}{\sqrt{3-2\sin\alpha}} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_z = \cdots = 7mgL\cos\alpha.$$

$$\Sigma F_x = 0: \qquad R_x - \frac{S\cos\alpha}{\sqrt{3-2\sin\alpha}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = \cdots = 7mg\cos\alpha.$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad R_y - \frac{S}{\sqrt{3-2\sin\alpha}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = \cdots = 7mg.$$

$$\Sigma F_x = 0: \qquad R_z + \frac{S(1-\sin\alpha)}{\sqrt{3-2\sin\alpha}} - 4mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_z = \cdots = (7\sin\alpha-3)mg.$$

7.



Inför först en koordinataxel enligt figuren med $x = 0$ i startläget.

$$\rightarrow \quad F_0 - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}.$$

Med $c = \sqrt{km}$ kan ekvationen skrivas

$$\ddot{x} + \sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}.$$

Sätt $\omega_0^2 = k/m$ och $2\zeta\omega_0 = \sqrt{k/m}$, dvs $\zeta = 1/2$.
Med hjälp av formelsamling kan då ekvationens lösning skrivas som

$$x = (C_1 \sin\omega_\mathrm{d} t + C_2 \cos\omega_\mathrm{d} t)\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} + \frac{F_0}{k}.$$

Här är

$$\omega_\mathrm{d} = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0,$$

och F_0/k är en partikulärlösning.
Låt rörelsen starta vid $t = 0$. Begynnelsevillkoren $x = 0$ och $\dot{x} = 0$ ger då

$$\begin{aligned} C_2 + \frac{F_0}{k} &= 0, \\ C_1\omega_\mathrm{d} - \zeta\omega_0 C_2 &= 0. \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{F_0}{k\sqrt{3}}, \\ C_2 &= -\frac{F_0}{k}. \end{aligned}$$

Ekvationens lösning är då

$$x = -\frac{F_0}{k}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\omega_\mathrm{d} t + \cos\omega_\mathrm{d} t\Big)\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} + \frac{F_0}{k}.$$

Kroppen har sitt största avstånd från startläget då den vänder första gången, vilket inträffar efter en halv period, dvs då

$$t = \frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}}.$$

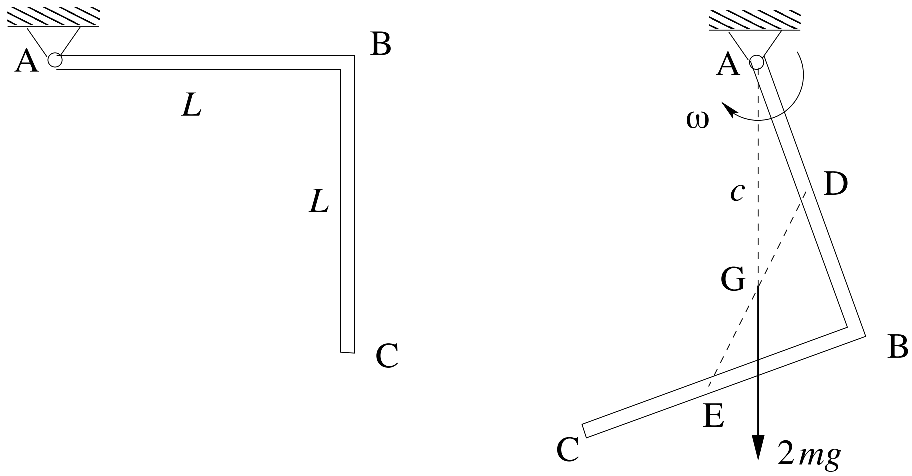
Motsvarande värde för x är

$$x_\mathrm{max} = \frac{F_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega_0\frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}}} + \frac{F_0}{k}$$

eller

$$x_\mathrm{max} = \frac{F_0}{k}\Big(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\Big) \approx 1,16\frac{F_0}{k}.$$

8.



Den enda kraft som uträttar arbete är tyngdkraften, vilket innebär att energin bevaras. Kroppen har sin maximala vinkelhastighet, då den kinetiska energin har maximum, dvs då den potentiella energin har minimum. Detta inträffar då tyngdpunkten passerar sitt lägsta läge, dvs då den ligger rakt under upphängningspunkten A (se figuren till höger ovan). Energikonservering ger då

$$-mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{A}}\omega^2 - 2mgc.$$

Här har A:s nivå valts som nollnivå, och c betecknar den gemensamma tyngdpunkten G:s avstånd från A. Eftersom G ligger mitt emellan stängernas tyngdpunkter (D och E) fås avståndet c med hjälp av Pythagoras' sats som

$$c = \sqrt{\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}L.$$

Tröghetsmomentet fås m h a formelsamling och Steiners sats som

$$I_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m\left(L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{3}mL^2.$$

Insättning i energisambandet ovan ger efter förenkling svaret

$$\omega = \sqrt{\frac{3(\sqrt{10}-1)g}{5L}} \approx 1,14\sqrt{\frac{g}{L}}.$$