Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet

Datum för tentamen	2019-08-29
Sal (1)	U1(4)
Tid	8-12
Utb. kod	TDAB01
Modul	TEN1
Utb. kodnamn/benämning **Modulnamn/benämning**	Sannolikhetslära och statistik Skriftlig tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	7
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Jose M. Peña
Telefon under skrivtiden	0700895280
Besöker salen ca klockan	10:00
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Erika Larsson, 013281868, erika.larsson@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (delas ut tillsammans med tentamen)
Övrigt	
Antal exemplar i påsen	

TDAB01 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

TENTAMEN 2019-08-29

Lärare

Jose M. Peña. Besöker lokalen. Nås vid telefon också.

Betyg

För full poäng i varje delfråga krävs tydliga och väl motiverade svar.
Maximalt antal poäng: 20 poäng
Betyg 5 = 17-20 poäng
Betyg 4 = 13-16 poäng
Betyg 3 = 9-12 poäng

Tillåtna Hjälpmedel

Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (ingår i tentamen).

UPPGIFTER

(1) (2 p) Ett program består av kodblock 1 och kodblock 2. Kodblock 1 har en bugg med sannolikhet 0.2, och kodblock 2 har en bugg med sannolikhet 0.4 oberoende av kodblock 1. Om det finns en bugg bara i kodblock 1, då kraschar programmet med sannolikhet 0.5. Om det finns en bugg bara i kodblock 2, då kraschar programmet med sannolikhet 0.8. Om det finns en bugg i båda kodblock 1 och 2, då kraschar programmet med sannolikhet 0.9. Anta att programmet har kraschat. Beräkna sannolikheten att det finns en bugg i båda kodblock 1 och 2.

Hjälp: Tilllämpa Bayes sats och lagen om total sannolikhet:

$$p(krasch) = \sum_i p(krasch|buggPlats_i)p(buggPlats_i).$$

(2) (2 p) Operativsystemet A kraschar 0.5 gånger per år, medan operativsystemet B kraschar en gång per år. Båda systemen är lika populära. En dator har inte kraschat i det senaste året. Beräkna sannolikheten att datorn kör operativesystemet A. Efter tre år, datorn har kraschat bara en gång. Beräkna igen sannolikheten att datorn kör operativesystemet A.

(3) (4 p) Den slumpvariabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3c^3}{x^4} & \text{om } x > c \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant.

(a) Visa att $f(x)$ är en giltig täthetsfunktion för X. (b) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X. (c) Beräkna $E[2X - 3c]$. (d) Beräkna variansen för X då $c = 1$.

(4) (2 p) Slumpvariabeln X är normal fördelad med $E(X) = -3$ och $var(X) = 4$. Beräkna (a) $p(X = -3)$, (b) $p(X \leq 2.39)$, (c) $p(-2.39 < X < 2.39)$, och (d) värdet a så att $p(X > a) = 0.33$.

(5) (2 p) Varje dag tar Norah samma väg från universitetet till träningshallen. Det finns fyra stoppsignaler på vägen och hon noterar följande: Om en stoppsignal visar grönt, kommer nästa stoppsignal att visa grönt med sannolikheten 0.5 och rött med sannolikheten 0.5. Om stoppsignalen däremot visar rött kommer nästa stoppsignal att visa rött med sannolikheten 0.6 och grönt med sannolikheten 0.4.

(a) Ange transitionsmatrisen som tillhör Markovkedjan. (b) Ange 2-stegs transitionsmatrisen och förklara vad den innebär. (c) Om det första stoppet visar grön, vad är sannolikheten att tredje stoppet visar röd ?

(6) (4 p) Antag ett oberoende stickprov från populationen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ där μ och σ^2 är okända. Det oberoende stickprovet gav följande observationer: 2.25, 3.10, 2.70, 3.60, 2.90, 2.15, 2.30 och 4.20. Bestäm p-värdet för följande hypotestest: $H_0 : \mu \geq 3.5$ mot $H_1 : \mu < 3.5$. Avgör om du kan förkasta nollhypotesen på 10 % signifikansnivå.

(7) (4 p) Ett företag har haft den följande budgeten under åren:

år (20xx)	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
budget (MSEK)	17	23	31	29	33	39	39	40	41	44	47

(a) Bygg en linjär regression modell från datan. (b) Testa hypotesen att budgeten ökar mer än 1.8 MSEK per år i genomsnitt. (c) Bygg en 95 % konfidensintervall för budgeten för 2017. (d) Förklara vad intervallet innebär. (e) Nämn de tre viktigaste antaganden som gjordes för att bygga intervallet.

Hjälp: $std(b_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$ och $std(\hat{y}_*) = \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$ där $\hat{y}_*$ är prediktionen för observationen x_*.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Mattias Villani

2015-10-12

TBAB01

TABELL- OCH FORMELSAMLING

SANNOLIKHETSFÖRDELNINGAR

- **Binomialfördelning**

$$X \sim Bin(n,p)$$
$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,\ldots,n$$
$$\mathbb{E}X = np, \qquad Var(X) = np(1-p).$$

- **Poissonfördelning**

$$X \sim Po(\mu)$$
$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \qquad x = 0,1,2,\ldots$$
$$\mathbb{E}X = \mu, \qquad Var(X) = \mu.$$

- **Geometrisk fördelning**

$$X \sim Ge(p)$$
$$P(x) = (1-p)^{x-1} p, \qquad x = 1,2,\ldots$$
$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}, \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- **Multinomialfördelning**

$$(X_1,...,X_k) \sim Multinomial(n, p_1, ..., p_k)$$
$$P(x_1,...,x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \qquad x_i = 0,1,2,...,n \text{ och } \sum_{i=1}^{n} x_i = n.$$
$$\mathbb{E}X_i = np_i, \qquad Var(X_i) = np_i(1-p_i), \qquad Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j \ (i \neq j).$$

- **Likformig (rektangulär) fördelning på intervallet (a,b)**

$$X \sim U(a,b)$$
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b$$
$$\mathbb{E}\mathrm{X} = \frac{a+b}{2}, \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- **Exponentialfördelning**

$$X \sim Exp(\lambda),$$

där λ betecknar intensiteten. Ibland används väntevärdet $\mu = \frac{1}{\lambda}$ som parameter.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- **Normalfördelning**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\mathbb{E}X = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

- **χ^2-fördelning**

$$Y \sim \chi^2(\nu)$$

Uppkomst: Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, var och en $N(0,1)$, gäller att $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ får en χ^2 fördelning med ν frihetsgrader.

$$f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}}{2^{(\nu/2)}\Gamma(\nu/2)}, \qquad x \geq 0,$$

där $\Gamma(\cdot)$ är gammafunktionen

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx, \quad \text{där } c > 0.$$

$$\mathbb{E}Y = \nu, \qquad Var(Y) = 2\nu.$$

- **t-fördelning**

$$Z \sim t(\nu)$$

Uppkomst: Om $X \sim N(0,1)$ och $Y \sim \chi^2(\nu)$ samt X och Y är oberoende, så gäller att $Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ får en t-fördelning med ν frihetsgrader.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

- **Gammafördelning**

$$Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

Uppkomst: Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, var och en $Exp(\lambda)$, så blir $Y = X_1 + \ldots + X_n$ gammafördelad med parametrarna n och λ.

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad Var(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- **Betafördelning**

$$X \sim Beta(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1$$

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

- **Dirichletfördelningen**

$$(X_1, ..., X_k) \sim Dirichlet(\alpha_1, ..., \alpha_k)$$

$$P(x_1, ..., x_k) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} x_1^{\alpha_1-1} \cdots x_k^{\alpha_k-1}, \qquad 0 < x_i < 1 \text{ och } \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

$$\mathbb{E}X_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \text{ där } \alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \qquad Var(X_i) = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}, \qquad Cov(X_i, X_j) = -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}(i \neq j).$$

DIVERSE DEFINITIONER OCH RESULTAT

- Kovarians: $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$, där $\mu_X = \mathbb{E}X]$ och $\mu_Y = \mathbb{E}Y$
- Korrelation: $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$, där $\sigma_X^2 = Var(X)$ och $\sigma_Y^2 = Var(Y)$
- Generellt gäller att

$$\mathbb{E}(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b) = a_1\mathbb{E}X_1 + \ldots + a_n\mathbb{E}X_n + b.$$

- För *oberoende* slumpvariabler $X_1, \ldots, X_n$ gäller att

$$Var(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b) = a_1^2Var(X_1) + \ldots + a_n^2Var(X_n).$$

- Generellt gäller att

$$Var(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b) = \sum_{j=1}^n a_j^2 Var(X_j) + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} a_ja_kCov(X_j, X_k).$$

- $X \sim Bin(n,p)$ och $n \geq 10$, $p \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad X \approx Po(np)$
- $X \sim Bin(n,p)$ och $np(1-p) \geq 10 \quad \Rightarrow \quad X \approx N(np, np(1-p))$,
- $X \sim Po(\mu)$ och $\mu \geq 15 \quad \Rightarrow \quad X \approx N(\mu, \mu)$.
- Om $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, gäller följande:

1. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,
2. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

3. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

- Vid **enkel linjär regression** ges modellen av

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad \text{för } i = 1, \ldots, n,$$

där $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$ och oberoende.
Minsta kvadrat-skattningar

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}},$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x},$$
$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

där

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- χ^2 **goodness of fit-test.**
  - H_0: Fördelningsfunktioner är $F_0(x)$ (inga okända parametrar).

Låt $p_i = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$ och N_i antalet x_i i intervallet $(a_{i-1}, a_i]$.

Teststatistika: $T = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \approx \chi^2(k-1)$-fördelad under H_0.

  - H_0: Given parametrisk fördelningsklass med fördelningsfunktion $F(x)$.

Teststatistika: $T = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$,

där p_i beräknas som enligt föregående punkt sedan parametrarna i $F(x)$ har skattats. T är approximativt $\chi^2(k-1-r)$-fördelad under H_0 där r = antalet skattade parametrar i $F(x)$.
I båda fallen krävs att alla $np_i \geq 5$.

BAYESIANSK INFERENS

Bernoulli data - Beta prior

- Modell: $X_1, ..., X_n|\theta \sim Bernoulli(\theta)$
- Prior: $\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$
- Posterior: $\theta|x_1, ..., x_n \sim Beta(\alpha + s, \beta + f)$, där $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ och $f = n - s$.

Normal data - Normal prior

- Modell: $X_1, ..., X_n|\theta, \sigma^2 \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 känd.
- Prior: $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$
- Posterior: $\theta|x_1, ..., x_n \sim N\left(\mu_x, \tau_x^2\right)$, där $\frac{1}{\tau_x^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}$, $\mu_x = w\bar{x} + (1-w)\mu$ och $w = \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$.

Multinomial data - Dirichlet prior

- Modell: $X_1, ..., X_K|\theta_1, ..., \theta_K \sim Multinomial(n, \theta_1, ..., \theta_K)$.
- Prior: $(\theta_1, ..., \theta_K) \sim Dirichlet(\alpha_1, ..., \alpha_K)$
- Posterior: $(\theta_1, ..., \theta_K)\,|x_1, ..., x_k \sim Dirichlet(\alpha_1 + x_1, ..., \alpha_K + x_K)$.

Normalfördelning

Tabell för $\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim N(0,1)$. För $x < 0$, använd att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

t-fördelning

Tabell för $F(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim t(\nu)$. För $F(x) < 0.5$, använd att $F(x) = 1 - F(-x)$.

	$F(x)$							
ν	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.9995
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	127.32	636.62
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	14.09	31.60
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	7.45	12.92
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	5.60	8.61
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	4.77	6.87
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.96
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.03	5.41
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	5.04
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.78
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.59
11	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.44
12	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.43	4.32
13	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	4.22
14	0.69	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.33	4.14
15	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	4.07
16	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	4.01
17	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.22	3.97
18	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.20	3.92
19	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.17	3.88
20	0.69	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.15	3.85
21	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.14	3.82
22	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.12	3.79
23	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.10	3.77
24	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.09	3.75
25	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.08	3.73
26	0.68	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.71
27	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.06	3.69
28	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.05	3.67
29	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.04	3.66
30	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.65
40	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.55
50	0.68	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68	2.94	3.50
60	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	2.91	3.46
100	0.68	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63	2.87	3.39
∞	0.67	1.28	1.65	1.96	2.33	2.58	2.81	3.29

χ^2-fördelning

Tabell för $F(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim \chi^2(\nu)$.

						$F(x)$					
ν	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.15	0.27	0.45
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	0.71	1.02	1.39
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	1.87	2.37
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	2.75	3.36
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	3.66	4.35
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	4.57	5.35
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	5.49	6.35
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	6.42	7.34
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	7.36	8.34
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	8.30	9.34
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	9.24	10.34
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	10.18	11.34
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	11.13	12.34
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	12.08	13.34
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	13.03	14.34
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	13.98	15.34
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	14.94	16.34
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	15.89	17.34
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	16.85	18.34
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	17.81	19.34
21	5.90	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	18.77	20.34
22	6.40	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	19.73	21.34
23	6.92	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	20.69	22.34
24	7.45	8.08	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	21.65	23.34
25	7.99	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	22.62	24.34
26	8.54	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	23.58	25.34
27	9.09	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	24.54	26.34
28	9.66	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	25.51	27.34
29	10.23	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	26.48	28.34
30	10.80	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	27.44	29.34
40	16.91	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	34.87	37.13	39.34
50	23.46	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	44.31	46.86	49.33
60	30.34	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	50.64	53.81	56.62	59.33
100	59.90	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	87.95	92.13	95.81	99.33

χ^2-fördelning, forts.

Tabell för $F(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim \chi^2(\nu)$.

ν	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.71	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	2.95	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	5.13	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	6.21	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	7.28	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	8.35	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	9.41	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	11.53	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	12.58	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	13.64	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	14.69	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	15.73	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	16.78	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	17.82	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	18.87	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	19.91	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	20.95	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	21.99	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	23.03	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	24.07	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	25.11	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	26.14	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	27.18	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	28.21	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	29.25	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	30.28	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	31.32	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40	41.62	44.16	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	51.89	54.72	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	62.13	65.23	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.69
100	102.95	106.91	111.67	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.17

Binomialfördelning

Tabell för $P(X \leq k)$ där $X \sim Bin(n, p)$.
För $p > 0.5$, använd att $P(X \leq k) = P(Y \geq n - k)$ där $Y \sim Bin(n, 1 - p)$.

		p									
n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5747	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980

Poissonfördelning

Tabell för $P(X \leq k)$ där $X \sim Po(\mu)$.

k	μ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

k	μ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

k	μ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000