

# Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet



Datum för tentamen	2019-01-08
Sal (1)	<u>TER3(13)</u>
Tid	14-18
Utb. kod	TDAB01
Modul	TEN1
Utb. kodnamn/benämning Modulnamn/benämning	Sannolikhetslära och statistik Skriftlig tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	7
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Jose M. Peña
Telefon under skrivtiden	0700895280
Besöker salen ca klockan	16:00
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Annelie Almquist
Tillåtna hjälpmedel	Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (delas ut tillsammans med tentamen)
Övrigt	
Antal exemplar i påsen	

# TDAB01 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

TENTAMEN 2019-01-08

## LÄRARE

Jose M. Peña. Besöker lokalen. Nås vid telefon också.

## BETYG

För full poäng i varje delfråga krävs tydliga och väl motiverade svar.

Maximalt antal poäng: 20 poäng

Betyg 5 = 17-20 poäng

Betyg 4 = 13-16 poäng

Betyg 3 = 9-12 poäng

## TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (ingår i tentamen).

## UPPGIFTER

- (1) (2 p) Ett program består av kodblock 1 och kodblock 2. Kodblock 1 har en bugg med sannolikhet 0.2, och kodblock 2 har en bugg med sannolikhet 0.4 oberoende av kodblock 1. Om det finns en bugg bara i kodblock 1, då kraschar programmet med sannolikhet 0.5. Om det finns en bugg bara i kodblock 2, då kraschar programmet med sannolikhet 0.8. Om det finns en bugg i båda kodblock 1 och 2, då kraschar programmet med sannolikhet 0.9. Anta att programmet har kraschat. Beräkna sannolikheten att det finns en bugg i båda kodblock 1 och 2.

Hjälp: Tillämpa Bayes sats och lagen om total sannolikhet:

$$p(\text{krasch}) = \sum_i p(\text{krasch}|\text{buggPlats}_i)p(\text{buggPlats}_i).$$

- (2) (2 p) Operativsystemet A kraschar 0.5 gånger per år, medan operativsystemet B kraschar en gång per år. Båda systemen är lika populära. En dator har inte kraschat i det senaste året. Beräkna sannolikheten att datorn kör operativsystemet A. Efter tre år, datorn har kraschat bara en gång. Beräkna igen sannolikheten att datorn kör operativsystemet A.
- (3) (2 p) Härled väntevärdet och variansen för en slumpvariable som är (a) Bernoulli fördelad, (b) binomial fördelad, och (c) likformig fördelad i intervallen  $[0, 1]$ .
- (4) (2 p) Slumpvariabeln  $X$  är normal fördelad med  $E(X) = -3$  och  $\text{var}(X) = 4$ . Beräkna (a)  $p(X = -3)$ , (b)  $p(X \leq 2.39)$ , (c)  $p(-2.39 < X < 2.39)$ , och (d) värdet  $a$  så att  $p(X > a) = 0.33$ .

- (5) (2 p) Varje dag tar Norah samma väg från universitetet till träningshallen. Det finns fyra stoppsignaler på vägen och hon noterar följande: Om en stoppsignal visar grönt, kommer nästa stoppsignal att visa grönt med sannolikheten 0.5 och rött med sannolikheten 0.5. Om stoppsignalen däremot visar rött kommer nästa stoppsignal att visa rött med sannolikheten 0.6 och grönt med sannolikheten 0.4.

(a) Ange transitionsmatrisen som tillhör Markovkedjan. (b) Ange 2-steps transitionsmatrisen och förklara vad den innebär. (c) Om det första stoppet visar grön, vad är sannolikheten att tredje stoppet visar röd ?

- (6) (5 p) Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara oberoende och likafördelade  $\text{Binomial}(4, p)$  slumpvariabler och anta vidare att apriorifördelningen för  $p$  är  $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ . (a) Härled aposteriorifördelningen för  $p$ . (b) Beräkna aposterioriväntevärdet för  $p$ . (c) Ett 95 % highest posterior density (HPD) intervall är ett Bayesianiskt osäkerhetsintervall för en parameter  $p$  som innehåller de värden på parametern som har högst aposterioritäthet, och där sannolikheten att  $p$  tillhör intervallet är 0.95. Beräkna ett HPD intervall för  $p$  givet  $n = 2$ ,  $\alpha = \beta = 1$  och  $\sum_{i=1}^n x_i = 8$ .

Hjälp:  $\Gamma(n + 1) = n!$  för icke-negativt heltal  $n$ .

- (7) (5 p) Ett företag har haft den följande budgeten under åren:

år (20xx)	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
budget (MSEK)	17	23	31	29	33	39	39	40	41	44	47

- (a) Bygg en linjär regression modell från datan. (b) Testa hypotesen att budgeten ökar mer än 1.8 MSEK per år i genomsnitt. (c) Bygg en 95 % konfidensintervall för budgeten för 2017. (d) Förklara vad intervallet innebär. (e) Nämn de tre viktigaste antaganden som gjordes för att bygga intervallet.

Hjälp:  $\text{std}(b_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$  och  $\text{std}(\hat{y}_*) = \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$  där  $\hat{y}_*$  är prediktionen för observationen  $x_*$ .

## TABELL- OCH FORMELSAMLING

### SANNOLIKHETSFÖRDELNINGAR

---

- Binomialfördelning

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$\mathbb{E}X = np, \quad Var(X) = np(1-p).$$

- Poissonfördelning

$$X \sim Po(\mu)$$

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{E}X = \mu, \quad Var(X) = \mu.$$

- Geometrisk fördelning

$$X \sim Ge(p)$$

$$P(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}, \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- Multinomialfördelning

$$(X_1, \dots, X_k) \sim Multinomial(n, p_1, \dots, p_k)$$

$$P(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ och } \sum_{i=1}^k x_i = n.$$

$$\mathbb{E}X_i = np_i, \quad Var(X_i) = np_i(1-p_i), \quad Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j \quad (i \neq j).$$

- Likformig (rektangulär) fördelning på intervallet (a,b)

$$X \sim U(a, b)$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Exponentialfördelning

$$X \sim \text{Exp}(\lambda),$$

där  $\lambda$  betecknar intensiteten. Ibland används väntevärdet  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  som parameter.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Normalfördelning

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\mathbb{E}X = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

- $\chi^2$ -fördelning

$$Y \sim \chi^2(\nu)$$

Uppkomst: Om  $X_1, \dots, X_n$  är oberoende, var och en  $N(0, 1)$ , gäller att  $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$  får en  $\chi^2$  fördelning med  $\nu$  frihetsgrader.

$$f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}}{2^{(\nu/2)} \Gamma(\nu/2)}, \quad x \geq 0,$$

där  $\Gamma(\cdot)$  är gammafunktionen

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx, \quad \text{där } c > 0.$$

$$\mathbb{E}Y = \nu, \quad \text{Var}(Y) = 2\nu.$$

- t-fördelning

$$Z \sim t(\nu)$$

Uppkomst: Om  $X \sim N(0, 1)$  och  $Y \sim \chi^2(\nu)$  samt  $X$  och  $Y$  är oberoende, så gäller att  $Z = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$  får en t-fördelning med  $\nu$  frihetsgrader.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

- Gammafördelning

$$Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

Uppkomst: Om  $X_1, \dots, X_n$  är oberoende, var och en  $\text{Exp}(\lambda)$ , så blir  $Y = X_1 + \dots + X_n$  gammafördelad med parametrarna  $n$  och  $\lambda$ .

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- Betafördelning

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

- Dirichletfördelningen

$$(X_1, \dots, X_k) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$P(x_1, \dots, x_k) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} x_1^{\alpha_1-1} \dots x_k^{\alpha_k-1}, \quad 0 < x_i < 1 \text{ och } \sum_{i=1}^k x_i = 1.$$

$$\mathbb{E}X_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \text{ där } \alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \quad \text{Var}(X_i) = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}, \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)} (i \neq j).$$

## DIVERSE DEFINITIONER OCH RESULTAT

---

- Kovarians:  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ , där  $\mu_X = \mathbb{E}X$  och  $\mu_Y = \mathbb{E}Y$
- Korrelation:  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ , där  $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$  och  $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$
- Generellt gäller att

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b) = a_1 \mathbb{E}X_1 + \dots + a_n \mathbb{E}X_n + b.$$

- För oberoende slumpvariabler  $X_1, \dots, X_n$  gäller att

$$\text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + \dots + a_n^2 \text{Var}(X_n).$$

- Generellt gäller att

$$\text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b) = \sum_{j=1}^n a_j^2 \text{Var}(X_j) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_j a_k \text{Cov}(X_j, X_k).$$

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$  och  $n \geq 10, p \leq 0.1 \Rightarrow X \approx \text{Po}(np)$
- $X \sim \text{Bin}(n, p)$  och  $np(1-p) \geq 10 \Rightarrow X \approx N(np, np(1-p))$ ,
- $X \sim \text{Po}(\mu)$  och  $\mu \geq 15 \Rightarrow X \approx N(\mu, \mu)$ .
- Om  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ , gäller följande:

1.  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ ,

2.  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ,

3.  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$

- Vid enkel linjär regression ges modellen av

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \text{för } i = 1, \dots, n,$$

där  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$  och oberoende.  
Minsta kvadrat-skattningar

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \\ \widehat{\sigma^2} &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \end{aligned}$$

- $\chi^2$  goodness of fit-test.

–  $H_0$ : Fördelningsfunktioner är  $F_0(x)$  (inga okända parametrar).

Låt  $p_i = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$  och  $N_i$  antalet  $x_i$  i intervallet  $(a_{i-1}, a_i]$ .

Teststatistika:  $T = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \approx \chi^2(k-1)$ -fördelad under  $H_0$ .

–  $H_0$ : Given parametrisk fördelningsklass med fördelningsfunktion  $F(x)$ .

Teststatistika:  $T = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i},$

där  $p_i$  beräknas som enligt föregående punkt sedan parametrarna i  $F(x)$  har skattats.  $T$  är approximativt  $\chi^2(k-1-r)$ -fördelad under  $H_0$  där  $r =$  antalet skattade parametrar i  $F(x)$ .

I båda fallen krävs att alla  $np_i \geq 5$ .

## BAYESIANSK INFERENS

---

### Bernoulli data - Beta prior

- Modell:  $X_1, \dots, X_n | \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$
- Prior:  $\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$
- Posterior:  $\theta | x_1, \dots, x_n \sim \text{Beta}(\alpha + s, \beta + f)$ , där  $s = \sum_{i=1}^n x_i$  och  $f = n - s$ .

### Normal data - Normal prior

- Modell:  $X_1, \dots, X_n | \theta, \sigma^2 \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  känd.
- Prior:  $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$
- Posterior:  $\theta | x_1, \dots, x_n \sim N(\mu_x, \tau_x^2)$ , där  $\frac{1}{\tau_x^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}$ ,  $\mu_x = w\bar{x} + (1-w)\mu$  och  $w = \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$ .

### Multinomial data - Dirichlet prior

- Modell:  $X_1, \dots, X_K | \theta_1, \dots, \theta_K \sim \text{Multinomial}(n, \theta_1, \dots, \theta_K)$ .
- Prior:  $(\theta_1, \dots, \theta_K) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$
- Posterior:  $(\theta_1, \dots, \theta_K) | x_1, \dots, x_k \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1 + x_1, \dots, \alpha_K + x_K)$ .



TABELLER

Normalfördelning

Tabell för  $\Phi(x) = P(X \leq x)$ , där  $X \sim N(0, 1)$ . För  $x < 0$ , använd att  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

### t-fördelning

Tabell för  $F(x) = P(X \leq x)$ , där  $X \sim t(\nu)$ . För  $F(x) < 0.5$ , använd att  $F(x) = 1 - F(-x)$ .

$\nu$	$F(x)$							
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.9995
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	127.32	636.62
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	14.09	31.60
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	7.45	12.92
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	5.60	8.61
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	4.77	6.87
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.96
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.03	5.41
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	5.04
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.78
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.59
11	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.44
12	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.43	4.32
13	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	4.22
14	0.69	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.33	4.14
15	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	4.07
16	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	4.01
17	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.22	3.97
18	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.20	3.92
19	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.17	3.88
20	0.69	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.15	3.85
21	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.14	3.82
22	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.12	3.79
23	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.10	3.77
24	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.09	3.75
25	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.08	3.73
26	0.68	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.71
27	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.06	3.69
28	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.05	3.67
29	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.04	3.66
30	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.65
40	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.55
50	0.68	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68	2.94	3.50
60	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	2.91	3.46
100	0.68	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63	2.87	3.39
$\infty$	0.67	1.28	1.65	1.96	2.33	2.58	2.81	3.29

## $\chi^2$ -fördelning

Tabell för  $F(x) = P(X \leq x)$ , där  $X \sim \chi^2(\nu)$ .

$\nu$	$F(x)$										
	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.15	0.27	0.45
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	0.71	1.02	1.39
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	1.87	2.37
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	2.75	3.36
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	3.66	4.35
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	4.57	5.35
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	5.49	6.35
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	6.42	7.34
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	7.36	8.34
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	8.30	9.34
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	9.24	10.34
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	10.18	11.34
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	11.13	12.34
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	12.08	13.34
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	13.03	14.34
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	13.98	15.34
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	14.94	16.34
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	15.89	17.34
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	16.85	18.34
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	17.81	19.34
21	5.90	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	18.77	20.34
22	6.40	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	19.73	21.34
23	6.92	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	20.69	22.34
24	7.45	8.08	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	21.65	23.34
25	7.99	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	22.62	24.34
26	8.54	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	23.58	25.34
27	9.09	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	24.54	26.34
28	9.66	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	25.51	27.34
29	10.23	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	26.48	28.34
30	10.80	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	27.44	29.34
40	16.91	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	34.87	37.13	39.34
50	23.46	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	44.31	46.86	49.33
60	30.34	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	50.64	53.81	56.62	59.33
100	59.90	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	87.95	92.13	95.81	99.33

$\chi^2$ -fördelning, forts.

Tabell för  $F(x) = P(X \leq x)$ , där  $X \sim \chi^2(\nu)$ .

$\nu$	$F(x)$									
	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.71	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	2.95	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	5.13	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	6.21	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	7.28	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	8.35	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	9.41	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	11.53	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	12.58	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	13.64	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	14.69	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	15.73	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	16.78	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	17.82	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	18.87	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	19.91	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	20.95	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	21.99	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	23.03	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	24.07	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	25.11	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	26.14	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	27.18	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	28.21	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	29.25	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	30.28	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	31.32	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40	41.62	44.16	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	51.89	54.72	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	62.13	65.23	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.69
100	102.95	106.91	111.67	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.17

## Binomialfördelning

Tabell för  $P(X \leq k)$  där  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

För  $p > 0.5$ , använd att  $P(X \leq k) = P(Y \geq n - k)$  där  $Y \sim \text{Bin}(n, 1 - p)$ .

$n$	$k$	$p$									
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5747	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980

## Poissonfördelning

Tabell för  $P(X \leq k)$  där  $X \sim Po(\mu)$ .

$k$	$\mu$									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

  

$k$	$\mu$									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

  

$k$	$\mu$									
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000