LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik och maskininlärning
Mattias Villani

2018-01-03
Sannolikhetslära och statistik, 6 hp
TDAB01

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik (TDAB01), 6 hp

Tid:	14:00-18:00
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (delas ut tillsammans med tentamen)
Examinator:	Mattias Villani, tel. $070 - 0895205$
Betyg:	Maximalt antal poäng: 20 poäng. Varje delfråga ger maximalt 5 poäng. Betyg 5 = 17-20 poäng Betyg 4 = 12.5-16.5 poäng Betyg 3 = 9-12 poäng

För full poäng krävs tydliga och väl motiverade svar.

1. En slumpvariabel X har fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om x} < -1 \\ 0.5(x+1) & \text{om -1} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{om x} > 1 \end{cases}$$

   (a) Bestäm $P(X > 0.2)$.
   (b) Bestäm täthetsfunktionen för X.
   (c) Bestäm väntevärdet och varians för X .

2. Ett test för att påvisa en viss form av cancer är positivt med sannolikheten 0.94 om patienten har cancertypen och är negativt med sannolikheten 0.98 om patienten inte har cancertypen. Antag vidare att 1 procent av populationen har cancertypen

   (a) Vad är sannolikheten att testet är positivt för en slumpmässigt vald person i populationen?
   (b) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald person har cancertypen givet att testet är positivt?
   (c) Ett slumpmässigt urval om 200 personer ur populationen som har fått ett positivt test ska testas vidare. Vilken fördelning och väntevärde har antalet personer bland dessa 200 som inte har cancertypen?

3. På en tenta förekommer tryckfel ganska slumpmässigt, och man kan anta att antalet tryckfel per tenta är en slumpvariabel X med en Poissonfördelning med väntevärdet 1.2.

   (a) Bestäm $P(X > 2)$.
   (b) I en tentasamling med 500 tentor, låt Y vara antalet tentor med fler än 2 tryckfel. Antalet tryckfel på olika tentor antas vara oberoende. Ange den exakta fördelningen för Y.
   (c) De senaste 20 tentorna innehöll i genomsnitt 1.5 tryckfel. Skapa ett approximativt 95%-konfidensintervall för andelen fel.

4. Låt $X_1, X_2, ..., X_n$ vara oberoende observationer från en Poissonfördelning med parameter θ.

   (a) Bestäm momenstskattningen $\hat{\theta}$ för θ och härled dess samplingvarians.

   (b) Härled maximum likelihoodskattningen $\hat{\theta}$ för θ.

   (c) Antag att din apriorifördelning för θ är en $Gamma(\alpha, \beta)$ fördelning. Visa att aposteriorifördelningen för θ är en Gamma-fördelning med parametrar $\alpha_x = \alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i$ och $\beta_x = \beta + n$.

   (d) Antag att du bedömmer din apriorikunskap sådan att $E(\theta) = 5$ och $Std(\theta) = 3$ (standardavvikelse). Ge en uttryck (formel) för aposteriorifördelningen för θ baserat på observationerna $x_1 = 1, x_2 = 1$ och $x_3 = 4$. Du ska alltså fortfarande anta att $\theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$ apriori.

Lycka till!

Mattias och Sarah