LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik och maskininlärning
Mattias Villani

2016-01-07
Sannolikhetslära och statistik, 6 hp
TDAB01

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik (TDAB01), 6 hp

Tid:	14-18
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (delas ut tillsammans med tentamen)
Examinator:	Mattias Villani, tel. $070 - 0895205$
Betyg:	Maximalt antal poäng: 20 poäng. Varje delfråga ger maximalt 5 poäng. Totalpoängen avrundas till närmaste heltal Betyg 5 = 18-20 poäng Betyg 4 = 14-17 poäng Betyg 3 = 10-13 poäng

För full poäng krävs tydliga och väl motiverade svar.

1. Ett kretskort i en dator består av 3 elektroniska komponenter. Komponenterna fungerar oberoende av varandra och livslängden T_i (mätt i månader) för komponent i har täthetsfunktionen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{om t}\geq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

   (a) Ange fördelningsfunktionen för T_i.

   (b) Vad är sannolikheten att alla komponenter fortfarande fungerar efter 6 månader?

   (c) Vad är sannolikheten att minst 2 av komponenterna fortfarande fungerar efter 6 månader?

   (d) Bestäm $E(T_i)$.

2. Låt A, B och C vara oberoende händelser sådana att $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.2$ och $P(C) = 0.1$.

   (a) Beräkna sannolikheten att minst en av händelserna inträffar.

   (b) Beräkna sannolikheten att A inträffar givet att minst en av händelserna inträffar.

3. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade $likformig(0, a)$.

   (a) Härled maximum likelihoodskattningen $\hat{a}$ för a. Bestäm sedan $\hat{a}$ givet stickprovet $(x_1 = 0.1, x_2 = 0.5, x_3 = 0.05, x_4 = 0.22, x_5 = 0.79, x_6 = 1, x_7 = 0.345, x_8 = 1.1, x_9 = 0.003, x_{10} = 0.24)$.

(b) Härled momentskattningen a' för a. Bestäm a' givet stickprovet $(x_1 = 0.1, x_2 = 0.5, x_3 = 0.05, x_4 = 0.22, x_5 = 0.79, x_6 = 1, x_7 = 0.345, x_8 = 1.1, x_9 = 0.003, x_{10} = 0.24)$.

(c) Bestäm en välmotiverad approximativ fördelning för $\bar{X}$. Bestäm även $E(\bar{X})$ och $Var(\bar{X})$.

4. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade $Normal(\theta, \sigma^2)$ slumpvariabler där σ^2 är känt. Anta också att apriorifördelningen för θ är en $Normal(\mu, \tau^2)$.

(a) Man kan visa att posteriorifördelningen för θ är $Normal(\mu_x, \tau_x^2)$ där $\mu_x = \frac{\frac{n}{\sigma^2}\bar{X} + \frac{1}{\tau^2}\mu}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$ och $\tau_x^2 = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$. Förklara med ord varför μ_x och τ_x^2 är intutitivt rimliga som väntevärde och varians i posteriorn.

(b) Vad är ett Highest Posterior Density (HPD) credible set? Konstruera ett 95% HPD credible set för θ givet $\mu = 0$, $\sigma^2 = \tau^2 = 1$ och stickprovet $(x_1 = 0.1, x_2 = 0.5, x_3 = 0.05, x_4 = -0.22, x_5 = 0.79, x_6 = 1, x_7 = 0.345, x_8 = -1.1, x_9 = 0.003, x_{10} = 0.24)$.

(c) Beräkna aposteriorifördelningen för $\psi = 4 + 3\theta$. Använd datamaterialet i uppgift 4b).

Lycka till!

Mattias