LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik och maskininlärning
Mattias Villani

2016-01-08
Sannolikhetslära och statistik, 6 hp
TDAB01

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik (TDAB01), 6 hp

Tid:	14-18
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (delas ut tillsammans med tentamen)
Examinator:	Mattias Villani, tel. $070 - 0895205$
Betyg:	Maximalt antal poäng: 20 poäng. Varje delfråga ger maximalt 5 poäng. Betyg 5 = 17-20 poäng Betyg 4 = 12.5-16.5 poäng Betyg 3 = 9-12 poäng

För full poäng krävs tydliga och väl motiverade svar.

1. Låt X vara vikten på en honungsmelon och Y vikten på en vattenmelon. Antag att X och Y är normalfördelade med väntevärde 1 respektive 2 och varians 0.25 respektive 0.36. Du väljer slumpmässigt och oberoende en honungsmelon och en vattenmelon.
   (a) Uttryck den sammanlagda vikten i termer av X och Y. Vilken fördelning har den sammanlagda vikten?
   (b) Vad är sannolikheten att den sammanlagda vikten är mindre än 2 kg?
   (c) Kilopriset på honungsmelonen är 10 kr och vattenmelonen 20 kr, uttryck den totala kostnaden Z i termer av X och Y. Vilken fördelning har Z?
   (d) Vad är sannolikheten att den totala kostnaden Z blir mer än 20 kr?

2. Samtal inkommer till en telefonväxel enligt en Poisssonprocess med intensitet 1 samtal per minut.
   (a) Låt T vara tiden mellan två på varandra följande samtal. Vad är sannolikheten att T är större än 1.5 minuter?
   (b) Låt T_{min} vara den minsta tiden mellan två på varandra följande samtal fram till det tredje samtalet. Vad är sannolikheten att T_{min} är mindre än 0.5 minuter.
   (c) Låt S_3 vara tidpunkten då den tredje samtalet inkommer, vilken fördelning har S_3?

3. Ett flygbolag uppskattar sannolikheten att en person med biljett inte dyker upp till flyget är 0.06 och är oberoende av andra personers benägenhet att dyka upp till flyget. Man väljer därför att sälja fler biljetter än de 200 platser som finns på planet för att minimera risken att få tomma platser. Hur många biljetter kan flygbolaget som mest sälja för att sannolikheten att alla passagerare får plats ska vara större än 0.99?

4. Låt $X_1, X_2, ..., X_n$ vara oberoende observationer från en Exponentialfördelning med parameter θ.

   (a) Härled maximum likelihoodskattningen $\hat{\theta}$ för θ. Visa att $\frac{1}{\hat{\theta}}$ är väntevärdesriktig (unbiased) för $\frac{1}{\theta}$.

   (b) Antag att din apriorifördelning för θ är en $Gamma(\alpha, \lambda)$ fördelning. Visa att aposteriorifördelningen för θ är en Gamma-fördelning med parametrar $\alpha_x = \alpha + n$ och $\lambda_x = \lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

   (c) Antag att du har observerat n oberoende observationer $x_1, ..., x_n$ med medelvärdet $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. Beräkna den prediktiva fördelningen för en ny observation $\tilde{x}$ från samma population, dvs beräkna

$$p(\tilde{x}|x_1, ..., x_n).$$

   [Ledtråd: Den prediktiva fördelningen får man genom att integrera ut den okända parameter θ med avseende på aposteriorifördelningen $p(\theta|x_1, ..., x_n)$].

Lycka till!

Mattias