

## Tentamen i Sannolikhetslära och statistik (TDAB01), 6 hp

---

Tid:	14-18
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (delas ut tillsammans med tentamen)
Examinator:	Mattias Villani, tel. 070 – 0895205
Betyg:	Maximalt antal poäng: 20 poäng. Varje delfråga ger maximalt 5 poäng. Betyg 5 = 17-20 poäng Betyg 4 = 12.5-16.5 poäng Betyg 3 = 9-12 poäng

**För full poäng krävs tydliga och väl motiverade svar.**

---

1. Låt  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vara oberoende observationer från en slumpvariabel  $X$  som har sannolikhetsfördelningen

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{3} & \text{för } x = -1 \\ \frac{1}{3} & \text{för } x = 0 \\ \frac{1+\theta}{3} & \text{för } x = 1 \end{cases}$$

där  $-1 \leq \theta \leq 1$ .

- Visa att sannolikheterna ovan faktiskt definierar en sannolikhetsfördelning.
  - Beräkna  $\mathbb{E}X$  och  $\text{Var}(X)$ .
  - Beräkna momentskattningen av  $\theta$  om  $n = 2$  och du har observerat  $x_1 = 0$  och  $x_2 = 1$ .
  - Beräkna maximum likelihood-skattningen av  $\theta$  om  $n = 2$  och du har observerat  $x_1 = 0$  och  $x_2 = 1$ .
  - Antag nu att du istället har observerat  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 1$ . Visa att momentskattningen för  $\theta$  är problematisk i det här fallet. Beräkna maximum likelihood-skattningen.
2. Kalle har 2 mynt i fickan, ett symmetriskt där sannolikheten för krona är 0.5 och ett skevt där sannolikheten för krona är 0.55. Kalle tar på måfå ett av mynten ur fickan.
- Vad är sannolikheten att Kalle får krona när han singlar (kastar) myntet en gång?
  - Vad är sannolikheten att få exakt 1 krona om Kalle singlar myntet 4 ggr?
  - För att bestämma vilket av mynten han fått tag i kastar han det dragna myntet 1000 gånger. Om han får 525 kronor eller mer drar han slutsatsen att det är det skeva myntet, får han färre än 525 drar han slutsatsen att det är det symmetriska myntet. Vad är sannolikheten att Kalle drar fel slutsats? Eventuella approximationer ska motiveras.

3. Två telefonväxlar  $A$  och  $B$  öppnar båda kl 8:00 på morgonen och samtal inkommer därefter till växlarna enligt två oberoende Poissonprocesser med intensiteter  $\lambda_A$  respektive  $\lambda_B$  samtal per timme.
- Vad är sannolikheten att det kl 9:00 har inkommit exakt tre samtal till växel  $A$ ?
  - Vad är sannolikheten att tiden mellan två på varandra följande samtal till växel  $B$  överstiger en timme?
  - Chefen kommer in kl 8:15 och får veta att det inte har kommit något samtal till växel  $A$  ännu. Vad är sannolikheten att tiden till det första samtalet till växel  $A$  överstiger en timme?
  - Låt  $T$  vara tiden (räknat från 8:00) tills det inkommer ett samtal till någon av växlarna. Vilken fördelning har  $T$ ?
4. Låt  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vara oberoende observationer från en Poissonfördelning med parameter  $\theta$ .
- Härled maximum likelihoodskattningen  $\hat{\theta}$  för  $\theta$  och beräkna dess samplingvarians.
  - Antag att din apriorifördelning för  $\theta$  är en  $Gamma(\alpha, \lambda)$  fördelning. Visa att aposteriorifördelningen för  $\theta$  är en Gamma-fördelning med parametrar  $\alpha_x = \alpha + \sum_{i=1}^n x_i$  och  $\lambda_x = \lambda + n$ .
  - Antag att du bedömer din apriorikunskap sådan att  $E(\theta) = 1$  och  $Std(\theta) = 2$  (standardavvikelse). Ge en uttryck (formel) för aposteriorifördelningen för  $\theta$  baserat på observationerna  $x_1 = 2, x_2 = 1$  och  $x_3 = 0$ . Du ska alltså fortfarande anta att  $\theta \sim Gamma(\alpha, \lambda)$  apriori.
  - Förklara vad som menas med påståendet: 'Intervall  $[a, b]$  är ett 95%-igt konfidensintervall för  $\theta$ '.
  - Förklara vad som menas med påståendet: 'Intervall  $[a, b]$  är ett 95%-igt bayesianskt sannolikhetsintervall för  $\theta$ '. (Sannolikhetsintervall kallas ibland också för kredibilitetsintervall. På engelska säger man ofta credibility interval).

LYCKA TILL!

MATTIAS