Lösning till tentamen i Reglerteknik 100526

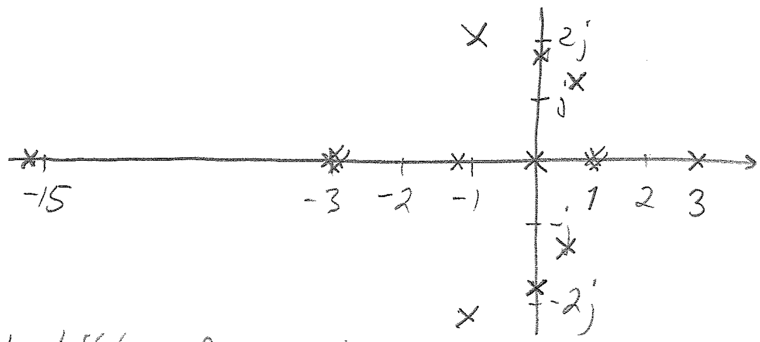
1. $G(s)=\frac{1}{s-3}$ $F(s)=K_i\frac{1+s}{s}$ $L(s)=G(s)F(s)$

a) $G_{ry}(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{\frac{K_i(1+s)}{s^2-3s}}{1+\frac{K_i(1+s)}{s^2-3s}}=\frac{K_i(1+s)}{s^2+(K_i-3)s+K_i}$

Polerna: $s^2+(K_i-3)s+K_i=0$

$$s_{1,2}=\frac{3-K_i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3-K_i}{2}\right)^2-K_i}=1.5-0.5K_i\pm0.5\sqrt{(3-K_i)^2-4K_i}$$

K_i	$s_{1,2}$
0	0, 3
1	1, 1
2	$0.5\pm j1.32$
3	$0\pm j1.73$
5	$-1\pm j2$
9	$-3,-3$
20	$-1.27, -15.7$



stabilt för $K_i>3$

b) Dubbelpol i $s=-3$ för $K_i=9$

$$K_{i_{\text{marginellt stabil}}}=A_m\cdot K_{i_{\text{dubbelpol}}}$$

$3=A_m\cdot 9 \Rightarrow A_m=1/3<1$

Alltför liten förstärkning leder till instabilitet.

c) $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{G_{ry}\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9(1+s)}{(s+3)^2}\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3^2}{s(s+3)^2}+\frac{9}{(s+3)^2}\right\}$

$=1-(1+3t)e^{-3t}+9te^{-3t}=1-e^{-3t}+6te^{-3t}$

2. a) $G(s) = \dfrac{3e^{-2s}}{1+5s}$ $\quad K = 3 \quad T_d = 2 \quad T = 5$

$F(s) = K_i \dfrac{1+5s}{s}$ $\quad K_i = \dfrac{1}{3(5\alpha+2)} = \begin{cases} 0.103 & \alpha = 0.25 \\ 0.074 & \alpha = 0.5 \end{cases}$

b) $L(s) = \dfrac{3K_i e^{-2s}}{s}$

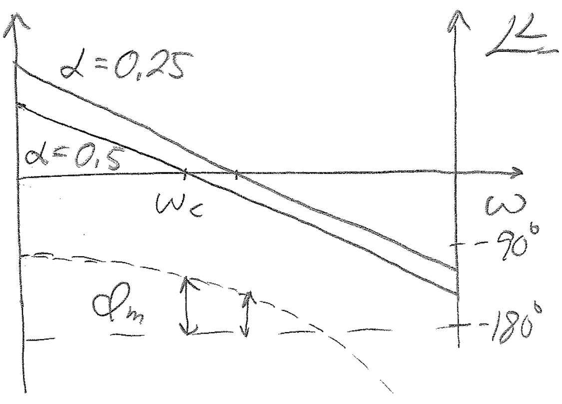
$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+3K_i e^{-2s}/s} = \frac{s}{s+3K_i e^{-2s}}$$

$$|S(j\omega)| \to \begin{cases} \dfrac{\omega}{3K_i} & \omega \ll 1 \\ 1 & \omega \to \infty \end{cases} \qquad \left(|e^{-2j\omega}| = 1 \right)$$

$$|G(j\omega)\, S(j\omega)| \to \begin{cases} \dfrac{\omega}{K_i} & \omega \ll 1 \\ \dfrac{0.6}{\omega} & \omega \gg 1 \end{cases}$$

$$|F(j\omega)\, S(j\omega)| \to \begin{cases} 1/3 & \omega \to 0 \\ 5K_i & \omega \to \infty \end{cases}$$

c)



α	ω_c	φ_m
0.25	0.31	55°
0.5	0.22	65°

d) $|GS|_{\omega\to 0}$ minskar, $|FS|_{\omega\to\infty}$ ökar och φ_m minskar då K_i ökar (α minskar $\Leftrightarrow$ snabbare reglering) vilket motsvarar effektivare kompensering av laststörningar, men större känslighet för mätstörningar och sämre stabilitetsmarginal

3. a) $G_0(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(1+T_0 s)}$ $\quad\quad G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

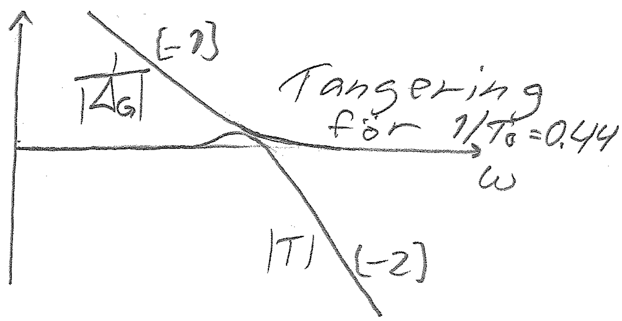
$$L(s) = \frac{K_p}{s(s+1)} \quad\quad G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p}{\underbrace{s^2+s+K_p}_{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}$$

$K_p = 1 \Rightarrow \omega_n = 1$ och $\zeta = 0.5$

b) $T(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)} = \dfrac{1}{s^2+s+1}$ $\quad\quad |T(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$

$$\Delta_G(s) = \frac{G_0(s)-G(s)}{G(s)} = \frac{G_0(s)}{G(s)} - 1 = \frac{1}{1+T_0 s} - 1 = \frac{-T_0 s}{1+T_0 s}$$

$$\frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|} = \frac{\sqrt{1+(T_0\omega)^2}}{T_0\omega}$$



Tangering för
$1/T_0 \approx 0.44 \Rightarrow$
robust stabilitet då $T_0 < 1/0.44 = 2.3$

c) $L_0(s) = K_p G_0(s) = \dfrac{1}{\underbrace{(s^2+s)(1+T_0 s)}_{T_0 s^3 + (1+T_0)s^2 + s}} \hat{=} \dfrac{B(s)}{A(s)}$

KE $A(s)+B(s) = T_0 s^3 + (1+T_0)s^2 + s + 1$

RH Tabell

s^3	T_0	1
s^2	$1+T_0$	1
s^1	$\frac{1+T_0-T_0}{1+T_0}$	0
s^0	1	

stabilt då $\begin{cases} T_0 > 0 \\ 1+T_0 > 0 \end{cases}$ dvs då $T_0 > 0$

Robust stabilitet ($|T| < \frac{1}{|\Delta_G|}$) är ett konservativt kriterium där stabilitet garanteras, i detta fall då $T_0 < 2.3$ medan R-H kriterium även tar hänsyn till fasvridningen för $\frac{1}{\Delta_G}$ och därmed ger ett exakt mått på stabilitet

4.

a) $A\frac{dh}{dt} = u - av$ $\qquad v = \sqrt{2gh}$, $A = 0.5\ m^2$

$a = 2\cdot 10^{-4}\ m^2$

$h_0 = 0.4\ m$

$$\dot{h} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh} + \frac{1}{A}u$$

$$\Delta\dot{h} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\frac{1}{2\sqrt{h_0}}\Delta h + \frac{1}{A}\Delta u = -0.00141\Delta h + 2\Delta u$$

b)

$$G_2(s) = \frac{12 - 6s + s^2}{12 + 6s + s^2} = 1 + \frac{As + B}{s^2 + 6s + 12} = \frac{s^2 + (6+A)s + 12 + B}{s^2 + 6s + 12}$$

$B = 0 \quad A = -12 \qquad G_2(s) = \dfrac{-12s}{s^2 + 6s + 12} + 1$

Styrbar kanonisk form

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{d1}\\ \dot{x}_{d2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -12\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{d1}\\ x_{d2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\Delta u_d$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix}-12 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{d1}\\ x_{d2}\end{bmatrix} + \Delta u_d$$

$$\Delta u_d \longrightarrow \boxed{\text{Död tid}} \xrightarrow{\Delta u} \boxed{\text{Tank}} \xrightarrow{\Delta h}$$

c) $\Delta\dot{h} = -0.00141\Delta h + 2(-12x_{d1} + \Delta u_d)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{d1}\\ \dot{x}_{d2}\\ \Delta\dot{h}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -12 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -24 & 0 & -0.00141\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{d1}\\ x_{d2}\\ \Delta h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}\Delta u_d$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{d1}\\ x_{d2}\\ \Delta h\end{bmatrix}$$

5 a) $\dot{x} = -x + u$ $\quad A = B = C = 1$

$y = x$ $\quad u = -L_u x + K_r r$

$-p - p - p^2/\lambda + 1 = 0$

$p^2 + 2\lambda p - 1 = 0$

$p = -\lambda \underset{(-)}{+} \sqrt{\lambda^2 + 1} \qquad (p \geq 0)$

$L_u = p/\lambda = \sqrt{1 + 1/\lambda^2} - 1$

$G_{ry}(s) = C(sI_n - A + BL_u)^{-1} BK_r = \dfrac{K_r}{s + 1 + L_u}$

$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow K_r = 1 + L_u = \sqrt{1 + 1/\lambda^2}$

b) Optimal polplacering

$\det(sI_n - A + BL_u) = s + 1 + L_u = 0$

$\Rightarrow s = -1 - L_u = -1 - \sqrt{1 + 1/\lambda^2} + 1 = -\sqrt{1 + 1/\lambda^2}$

λ	s
1	$-\sqrt{2} = -1{,}41$
0.01	-100
10^{-4}	-10^4

c) $\lambda \to 0 \Rightarrow s \to -\infty$

$\lambda \to \infty \Rightarrow s \to -1 =$ processens pol

$\therefore$ oändligt straff på styrsignalen betyder ingen reglering

($L_u = 0$ och $u = K_r r = r$)