Sensorer, Signaler & System, Z2
SSY041 B 140117

1.
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 8x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

Laplacetransformera!

$$s^2Y(s) + 7sY(s) + 10Y(s) = 8X(s) + sX(s)$$
$$Y(s)(s^2+7s+10) = X(s)(s+8)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+8}{s^2+7s+10} = \dots = \frac{s+8}{(s+2)(s+5)}$$

Insignal $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} = X(s)$

PBU!
$$Y(s) = X(s)\cdot H(s) = \frac{s+8}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

$$s+8 = A(s+2)(s+5) + Bs(s+5) + Cs(s+2)$$

$s=0 \Rightarrow \quad 8 = A\cdot 2\cdot 5 = 10A \quad \therefore A = 0{,}8 = \frac{4}{5}$

$s=-2 \Rightarrow \quad 6 = B(-2)(3) \quad \therefore B = -1$

$s=-5 \Rightarrow \quad 3 = C(-5)(-3) \quad \therefore C = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$$Y(s) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(s+5)}$$

Inv. Laplacetransf.

$$y(t) = \left(\frac{4}{5} - e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{-5t}\right)u(t)$$

SSY041 B
140117

2. $y[n] - 0{,}25\,y[n-1] = 2x[n] - x[n-1]$

z-transformera! Antag $y[-1] = 0$

$$Y(z)\left(1 - 0{,}25z^{-1}\right) = X(z)\left(2 - z^{-1}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - z^{-1}}{1 - 0{,}25z^{-1}}$$

Insignal $x[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1 + 0{,}25z^{-1}}$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = \frac{2 - z^{-1}}{(1 - 0{,}25z^{-1})(1 + 0{,}25z^{-1})} = z \cdot \frac{2z - 1}{(z - 0{,}25)(z + 0{,}25)}$$

P.B.U. $$\frac{2z-1}{(z-0{,}25)(z+0{,}25)} = \frac{A}{z-0{,}25} + \frac{B}{z+0{,}25}$$

$$2z - 1 = A(z + 0{,}25) + B(z - 0{,}25)$$

$z = 0{,}25 \Rightarrow -0{,}5 = A(0{,}5) \Rightarrow A = -1$

$z = -0{,}25 \Rightarrow -1{,}5 = B(-0{,}5) \Rightarrow B = 3$

$$Y(z) = 3\frac{z}{z + 0{,}25} - \frac{z}{z - 0{,}25}$$

Inv. z-transf.

$$y[n] = \left[3\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$

3 Studera $|X[k]|$, $N=32$

$N=32$ Vi har fyra värden på $|X[k]|$
som är betydligt större än övriga:
se $k = 8, 13, 19$ och 24

$k=32$ svarar mot samplingsfrekvensen
$f_s = 200$ Hz
Skillnad i frekvens mellan två
intill liggande värden på $X[k]$ är
$\Delta f = \frac{f_s}{N}$ (frekvensupplösning)

Ett k-värde svarar då mot
frekvensen $f_k = \frac{k}{N} \cdot f_s$

$k = 8$ och 24 $(N-8=24)$ svarar mot en
reell sinusformad signal med frekvensen
$f_8 = \frac{8}{32} \cdot 200 = 50$ Hz (vår brum signal)

$k = 13$ och 19 $(N-13=19)$ svarar då mot den
sinusformade signalen $g(t)$ med
$f_g = \frac{13}{32} \cdot 200 \approx 81.3$ Hz $\left(< \frac{f_s}{2} \right)$

Svar: Den sinusformade signalen $g(t)$ har
frekvensen 81 Hz

4. $H(s) = -\dfrac{sR_2C_1}{1+sR_1C_1}$ $\qquad C_1 = 1{,}0\,\mu F$

Frekvenssvar: $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \dfrac{-j\omega R_2C_1}{1+j\omega R_1C_1}$

Bodediagram visar $|H(j\omega)|$ i dB och $\arg\{H(j\omega)\}$

Från "Magnitude" diagram $|H(j\omega)|_{dB} = 20$ dB då $\omega \to \infty$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega R_2C_1}{\sqrt{1+(\omega R_1C_1)^2}} = \{\omega\to\infty\} \approx \frac{\omega R_2C_1}{\omega R_1C_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$20 = 20\,{}^{10}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\ ;\quad {}^{10}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 1 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 10$$

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arg\{-j\omega R_2C_1\} - \arg\{1+j\omega R_1C_1\} =$$
$$= -90^\circ - \arctan\{\omega R_1C_1\}$$

$\omega = 10^3$ rad/s ger från "Phase" diagram -135°

Då måste $\arctan\{\omega R_1C_1\} = 45^\circ \Rightarrow \omega R_1C_1 = 1$
för $\omega = 10^3$ rad/s

$$R_1 = \frac{1}{10^3\cdot C_1} = \frac{1}{10^3\cdot 10^{-6}} = 10^3 = 1{,}0\ k\Omega$$

$$R_2 = 10\,R_1 = 10\ k\Omega$$