Tentamen ssy040/041
Sensorer, Signaler och System, del A, Z2

Examinator: Ants R. Silberberg

25 augusti 2008 kl. 14.00-18.00 sal V

Förfrågningar:	Ants Silberberg , tel. 1808
Lösningar:	Anslås tisdagen den 26 augusti på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Anslås måndagen den 8 september kl. 15 på institutionens anslagstavla, plan 5.
Granskning:	Onsdag 10 sept. kl. 13.15 - 15.00 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Två sidor med egna anteckningar

Betygsgränser (ej slutbetyg)

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

OBS! Skriv <u>namn</u> och <u>personnummer</u> på varje sida. Lycka till!

1. a) Är den kontinuerliga signalen $x_1(t)$ periodisk?
   Ange i så fall signalens periodtid. *(1p)*

$$x_1(t) = u(t) - \frac{1}{2}, \quad \forall t$$

   b) Är den diskreta signalen $x_2[n]$ periodisk?
   Ange i så fall signalens period. *(2p)*

$$x_2[n] = 4\cos(\pi n - 2), \quad \forall n$$

   c) Ett diskret system definieras av differensekvationen $y[n] = x[2n]$.
   Är systemet linjärt? Motivera! *(2p)*

2. a) Ett diskret LTI-system har impulssvaret $h[n]$ och insignalen $x[n]$.
   Beräkna systemets utsignal. *(2p)*

$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$
$$x[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] + 8\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

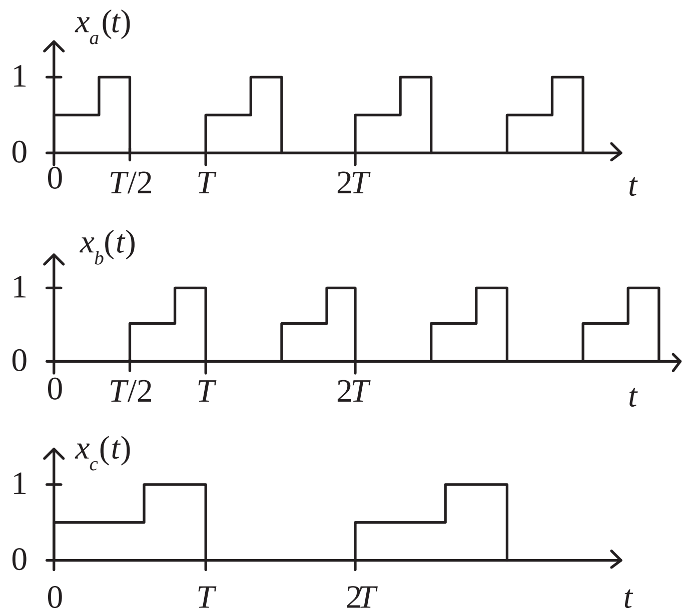
   b) Ett diskret LTI-system har impulssvaret $h[n]$ och insignalen $x[n]$.
   Beräkna systemets utsignal. För full poäng skall den diskreta faltningssumman användas. *(3p)*

$$h[n] = 2(0.5)^n u[n]$$
$$x[n] = u[n-1]$$

3. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ kan beskrivas med en Fourier-serie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \ .$$

Några representativa delar av tre kontinuerliga och periodiska signaler $x_a(t)$, $x_b(t)$ och $x_c(t)$ visas i figur 1 där $T = 1.0$ ms.



Figur 1: Tre periodiska signaler

a) Vilken grundvinkelfrekvens ω_o har signal $x_a(t)$? *(1p)*

b) Fourierseriekoefficienterna till signalen $x_a(t)$ tecknas c_{ak}. Beräkna/uppskatta c_{ak} för $k = 0$. Låt figur 1 definiera signalen. *(1p)*

c) Antag att alla Fourierseriekoefficienter c_{ak} till signalen $x_a(t)$ är kända. Ange värdena på Fourierseriekoefficienterna c_{bk} till signalen $x_b(t)$. *(1p)*

d) Ange värdena på Fourierseriekoefficienterna c_{ck} till signalen $x_c(t)$. *(2p)*

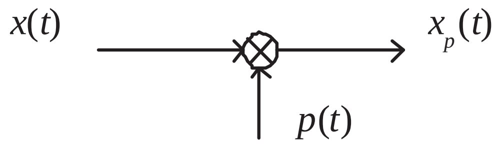
4. En kontinuerlig signal $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ samplas genom multiplikation av ett impulståg $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ enligt figur 2. Den samplade signalen $x_p(t)$ filtreras sedan i ett idealt rekonstruktionsfilter med frekvenssvaret

$$H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Samplingsintervallet $T = 0.025$ s och $\omega_s = 2\pi/T$.

a) Skissa och beskriv den samplade signalens Fouriertransform, $X_s(j\omega) = FT\{x_p(t)\}$.

b) Skissa och beskriv den filtrerade signalens Fouriertransform. ($x_p(t)$ filtrerad genom $H(j\omega)$).



Figur 2: System för sampling

(5p)

5. Den kontinuerliga signalen $x(t)$ har Fouriertransformen

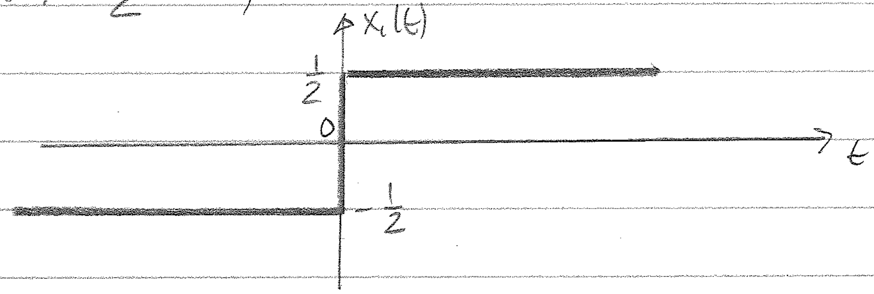
$$X(j\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega - 20}{\pi}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{\omega + 20}{\pi}\right) \quad .$$

Vilken är signalen $x(t)$? *(5p)*

Sensorer, Signaler & System, A
080825 SSY 041 A

1) a)

$$x_1(t) = u(t) - \frac{1}{2} \quad , \forall t$$



Periodisk om $x_1(t) = x_1(t+T)$ för något värde på T

Svar: Ej periodisk

b) $x_2[n] = 4\cos(\pi n - 2)$, $\forall n$

$$x_2[n+N] = 4\cos(\pi(n+N)-2) = 4\cos(\pi n - 2 + N\pi) =$$
$$= \{N=2\} = 4\cos(\pi n - 2 + 2\pi) = 4\cos(\pi n - 2) = x_2[n]$$

Svar: Periodisk med $N=2$

c)

Insignal	Utsignal
$x[n]$	$y[n] = x[2n]$
$x_1[n]$	$x_1[2n] = y_1[n]$
$x_2[n]$	$x_2[2n] = y_2[n]$
$a x_1[n]$	$a x_1[2n] = a y_1[n]$
$b x_2[n]$	$b x_2[2n] = y_2[n]$
$a x_1[n] + b x_2[n]$	$a x_1[2n] + b x_2[2n] = a y_1[n] + b y_2[n]$
	Superposition!

Systemet är linjärt

080825
SSY041A

2/ a/ Använd superposition – för varje impuls i insignalen svarar systemet med ett impulssvar, summera bidragen

$x[n]$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta[n]$		1	1	1	1					
$4\delta[n-1]$			4	4	4	4				
$8\delta[n-2]$				8	8	8	8			
$2\delta[n-3]$					2	2	2	2		
$\Sigma \Rightarrow y[n]$	0	1	5	13	15	14	10	2		

$$y[n] = \delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 13\delta[n-3] + 15\delta[n-4] + 14\delta[n-5] + 10\delta[n-6] + 2\delta[n-7]$$

b/
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-1] \cdot 2(0{,}5)^{n-k}\, u[n-k] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (0{,}5)^{n-k} = 2 \cdot 0{,}5^{n} \sum_{k=1}^{n} 0{,}5^{-k} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}5^{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k} = 2 \cdot 0{,}5^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k} - 1 \right) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}5^{n} \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 \right) = 2 \cdot 0{,}5^{n} \left(2^{n+1} - 2 \right) =$$

$$= 2 \cdot 2^{-n} \left(2^{n+1} - 2 \right) = 2\left(2 - 2^{-n} \cdot 2^{1} \right) =$$

$$= 4 - 2^{-n+2} = 4 - 0{,}5^{n-2}, \quad n \geq 1$$

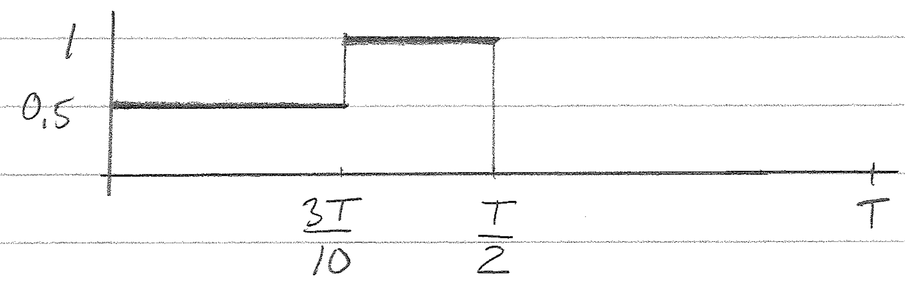
$$y[n] = 0, \quad n < 1$$

080825
SSY041A

3/

a/ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10^{-3}} = 2\pi \cdot 10^3$ r/s

b/ Enligt figur skissar vi en period av signalen



c_{ak} för $k=0$ är signalens medelvärde

$$c_{a0} = \frac{1}{T}\int_0^T x_a(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[0{,}5 \cdot \frac{3T}{10} + \frac{2T}{10}\right] =$$

$$= \frac{1{,}5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3{,}5}{10} = 0{,}35$$

c/ $x_b(t) = x_a(t - \frac{T}{2})$ Tidsfördröjning

$$x_a(t) \xleftrightarrow{FS} c_{ak}$$

$$x_b(t) = x_a(t - \frac{T}{2}) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} c_{ak}$$

$$\left\{\omega_0 \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi\right\}$$

$$c_{bk} = e^{-jk\pi} \cdot c_{ak}$$

d/ Samma signalform men annan periodtid

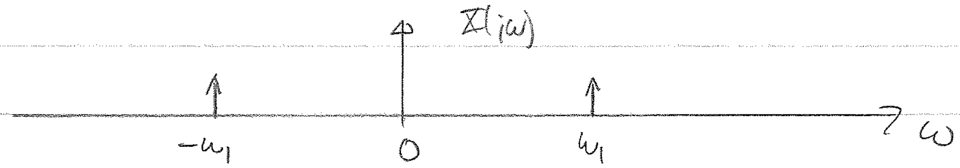
Då är $c_{ck} = c_{ak}$ men med $\omega_0' = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega_0}{2}$

080825
SSY041A

4) $x(t) = 2 + \cos(\omega_1 t)$ $\omega_1 = 50\pi$ r/s

Fouriertransformera !

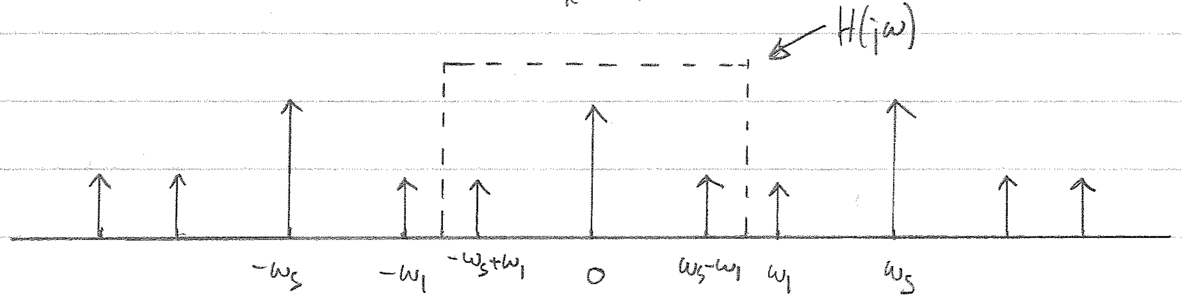
$$X(j\omega) = 4\pi\,\delta(\omega) + \pi\,\delta(\omega - \omega_1) + \pi\,\delta(\omega + \omega_1)$$



Samplingsfrekvens $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}025} = 80\pi$ r/s

Samplade signalens Fouriertransform

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



Efter filtrering erhålls $Y(j\omega) = 4\pi\,\delta(\omega) + \pi\,\delta(\omega - (\omega_s - \omega_1)) + \pi\,\delta(\omega + (\omega_s - \omega_1))$

$\omega_s - \omega_1 = 30\pi$

$$Y(j\omega) = 4\pi\,\delta(\omega) + \pi\,\delta(\omega - 30\pi) + \pi\,\delta(\omega + 30\pi)$$

Inv. Fouriertransf. ger

$$y(t) = 2 + \cos(30\pi t)$$ (Aliasing !)

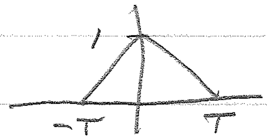
SSY041A
080825

5/ $$X(j\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega-20}{\pi}\right) + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega+20}{\pi}\right)$$

Från kursbok

$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{FT}{\longleftrightarrow} T\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T\omega}{2}\right)$$

$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{T}, & |t|<T \\ 0, & 0 \text{ annars} \end{cases}$$



Låt $X_1(j\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$ där $\pi = \frac{2}{T}$

Invers Fouriertransform ger

$$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T\omega}{2}\right) = \left\{T = \frac{2}{\pi}\right\} = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \text{ ger}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2/\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2/\pi}\right)$$

Egenskap: $f(t)e^{j\omega_0 t} \overset{FT}{\longleftrightarrow} F(\omega-\omega_0)$

$$X(j\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega-20}{\pi}\right) + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega+20}{\pi}\right) \text{ ger}$$

$$x(t) = e^{j20t}x_1(t) + e^{-j20t}x_1(t) =$$

$$= 2x_1(t)\cos(20t)$$ med

$$x_1(t) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2/\pi}\right)$$