CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematisk statistik för Z & NP

Tentamen 12 januari 2001 f M

Tillåtna hjälpmendel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är Jonas Tekele, ankn 8295.

Obs att skrivningstiden är 5 timmar.

Uppgifter

1. För två händelser A och B vet man att $A \cap B = \emptyset$.

   (a) Uttryck i ord vad detta säger dig. (1 p)

   (b) Antag att $P[A] = 3/7$ och $P[B] = 1/7$. Vad blir $P[A \cup B]$? (1 p)

2. Tiden W tills inträffandet av första händelsen i en Poissonprocess X_t med intensitet λ är exponentialfördelad med väntevärde $E[W] = 1/\lambda$. Visa detta. (Ledning: $X_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$.) (4 p)

3. (a) Låt $X \sim \text{N}(5, 2)$. Beräkna $P[X > 9]$. (1 p)

   (b) Ungefär hur stor är sannolikheten att en normalfördelad stokastisk variabel avviker från sitt väntevärde med mer än 2 standardavvikelser? (1 p)

   (c) Låt $S \sim \text{Bin}(100, 0.5)$. Bestäm ett tal a sådant att $P[50 - a \leq S \leq 50 + a] \approx 0.95$. (2 p)

4. Låt X, Y ha sannolikhetstätheten

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/c, \quad 0 \leq x \leq y \leq 4$$

   (Paret X, Y har alltså en likformig fördelning på delmängden $\{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$ av R^2.)

   (a) Bestäm c. (1 p)

   (b) Bestäm $P[X \leq Y]$ och $P[Y \leq X]$? (1 p)

   (c) Bestäm X:s sannolikhetstäthet $f_X(x)$. (2 p)

   (d) Är X, Y oberoende eller ej? (2 p)

5. Man misstänker att en viss tärning är osymmetrisk på ett sådant sätt att sidan med sexan har större chans att komma upp än de andra sidorna. I en försöksserie om $n = 60$ kast erhölls $f = 16$ sexor. Är det därmed statistiskt säkerställt (på nivån 5%) att tärningen är osymmetrisk. (3 p)

(vänd)

6. I 10 oberoende mätningar av en kunds utdatamängd i en processorinstallation erhölls i en normerad enhet

$$6.48 \quad 2.59 \quad 1.52 \quad 1.57 \quad 5.41 \quad 4.49 \quad 8.61 \quad 6.4 \quad 4.93 \quad 5.96$$

   (a) Punkt- och intervallskatta väntevärdet av mätningarna. Konfidensgraden ska vara 99%. (2 p)

   (b) Punkt- och intervallskatta variansen σ^2 i mätningarna. Konfidensgraden ska vara 95%. (2 p)

   Var i båda fallen noga med att ange förutsättningarna för dina beräkningar.

7. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov från en $\Gamma(\alpha, \beta)$-fördelning. Härled uttryck för momentskattningarna av α och β. (4 p)

8. Låt s^2 vara variansen i stickprovet $X_1, \ldots, X_n$ på den stokastisak variabeln X med $E[X] = \mu$ och $\text{Var}[X] = \sigma^2$. Visa att s^2 är en väntevärdesriktig skattning av σ^2. (3 p)

Lycka till!