Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-08-31, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Felix Held, tel. 031 - 772 67 92
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal och formler på tentatesens baksida. Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Avgör om följande gränsvärden existerar: (4p)

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + x^2y^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^4}$$

2. Låt $f(x,y) = 2x + y - 12\ln(16 + xy)$, där $x, y > 0$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till den nivåkurva till f som går genom punkten $(1,4)$. (2p)

(b) Finn alla stationära punkter av funktionen f i första kvadranten och bestäm deras karaktär. (4p)

Tips: När man undersöker karaktärerna, så kommer man få flera ganska stora tal. Dessa tal har dock många gemensamma faktorer som kan brytas ut, vilket förenklar beräkningarna.

3. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y,z) = x + y - z$ då definitionsmängden består av de punkter $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 27$. (5p)

4. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt deriverbar funktion. Visa att funktionen (6p)

$$u(x,y,z) = \sqrt{z}\, f\left(5e^{x^2-y^2}, 3e^{2y^2-2x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in (0,\infty),$$

löser den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

5. Beräkna kurvintegralen (6p)

$$\int_C \sqrt{4 + (xy)^2}\, ds,$$

där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och ytan $z = \frac{1}{2}y^2$.

OBS: Trigonometriska formler finns på baksidan.

Var god vänd!

6. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D \frac{2\cdot(y/x)}{5+x^2+y^2}\,dA,$$

där D är området beskrivet av olikheterna $\quad 4 \le x^2+y^2 \le 9; \quad x+y \ge 0 \quad$ och $\quad y \le 0.$

7. (a) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C y^2\,dx + 2\,dy$, där C är enhetscirkeln med mittpunkten i origo som genomlöps en gång moturs. (3p)

(b) Bestäm om vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ är konservativt på enhetscirkelskivan. (1p)

(c) Avgör om ditt svar på deluppgift (a) kan utnyttjas för att besvara deluppgift (b). Beskriv tydligt hur kurvintegralens värde används för att visa att fältet är konservativt, respektive förklara varför det inte kan utnyttjas. (2p)

8. Låt K vara ett klot vars yta ∂K är orienterad så att normalvektorerna pekar utåt. Antag att $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är två kontinuerligt differentierbara vektorfält sådana att

$$\iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})\,dV = 0. \tag*{(5p)}$$

(a) Bestäm sambandet mellan flödena

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS \qquad \text{och} \qquad \oiint_{\partial K} \mathbf{G}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

(b) Antag vidare att vektorfältet $\mathbf{F}$ har en vektorpotential $\mathbf{\Phi}$ i $\mathbb{R}^3$, d.v.s. det finns ett vektorfält $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sådant att $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{\Phi}$ i hela rummet $\mathbb{R}^3$. Beräkna flödet

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{G}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

9. Låt C vara randen till paraboloidytan $x^2+y^2 = 2z$, $z \le 2$, orienterad moturs sedd uppifrån. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 - y + e^{zx} \\ x^2y + \cos(yz) \\ xy + \ln(1+x+z) \end{pmatrix}$. (6p)

Lycka till!

Några trigonometriska formler

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sqrt{1-\cos v} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{v}{2}),\;\; v\in[0,2\pi], \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\sqrt{1+\cos w} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{w}{2}),\;\; w\in[-\pi,\pi], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$