

Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2013-01-16, M

Skrivtid: 08.30-12.30.
Ansvarig: Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt: Adam Andersson, tel. 0703-088304.
Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat: E-post från LADOK. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Betygsgränser: 10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag: På www efter 17.
Hjälpmedel: Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde ($\tilde{}$).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Vi vill bestämma centrum och radie för den cirkel som går genom punkterna $(3, -1.5)$, $(1, 0.5)$ och $(1, -3.5)$. Ställ upp lämpliga ekvationer och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand, det ger inga poäng! (3p)

2. Beräkna

$$\int_{\gamma} y dx + x dy$$

där γ är linjestyckena från $(0, 0)$ till $(1, 1)$ och från $(1, 1)$ till $(0, 2)$. (3p)

3. Bestäm **alla** värden på d (reellt tal) så att planet $x + y + z = d$ tangerar ytan som definieras av $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. (3p)

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ givet att $x^4 + y^4 = 1$. (3p)

5. Beräkna volymen av den kropp som definieras av olikheterna:

$$z \geq x^2 + y^2 - 1, \quad z \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 1, \quad z \geq 0 \quad (3p)$$

6. Finn alla lösningar av formen $f(x, y) = g(x^2 + y)$ till differentialekvationen $-2f'_y + f''_{xx} + xf''_{xy} = 0$. (3p)

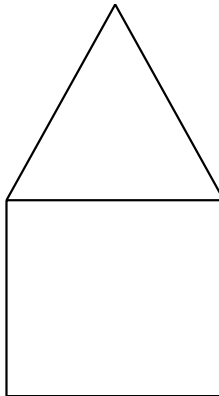
Var god vänd!

7. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \right)^2$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)^3}{x^2 + y^2}$

(3p)

8. I bilden nedan ser du en saltströare från sidan:



Saltströaren består av en rotationssymmetrisk cylinder och kon. Vi tänker oss att det finns salt både inuti cylindern och konen (du behöver inte ta hänsyn till någon godstjocklek i din lösning).

Vi vill maximera volymen givet att ströarens totala area inte överstiger 0.03m². Ströarens totala höjd måste ligga i intervallet [0.07, 0.1] m och ströarens cylinderdiameter i intervallet [0.03, 0.05] m. Konens höjd måste vara minst 55% av cylinderns höjd.

a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.

Ledning: konens mantelyta är $\pi r \sqrt{k^2 + r^2}$ om r är basens radie och k är höjden.

Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!

b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut maximal volym samt värdena på de variabler som bestämmer ströarens form. Du behöver **inte** skicka med `options`.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
    LB <= x <= UB           enkla gränser
    A * x <= B,      Aeq * x = Beq   linjära bivillkor
    C(x) <= 0,      Ceq(x) = 0       icke linjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x) och function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB,
@constr_fun)
```

(4p)