Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2013-01-16

1. Cirkelns ekvation lyder $(a-x)^2 + (b-y) - r^2 = 0$ om (a,b) är centrum och radien är r. Systemet kan skrivas

$$\begin{aligned}(a-3)^2 + (b+1.5) - r^2 &= 0\\ (a-1)^2 + (b-0.5) - r^2 &= 0\\ (a-1)^2 + (b-3.5) - r^2 &= 0\end{aligned}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1}\\ b_{k+1}\\ r_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k\\ b_k\\ r_k\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_k-3 & b_k+1.5 & -r_k\\ a_k-1 & b_k-0.5 & -r_k\\ a_k-1 & b_k-3.5 & -r_k\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(a_k-3)^2+(b_k+1.5)-r_k^2\\ (a_k-1)^2+(b_k-0.5)-r_k^2\\ (a_k-1)^2+(b_k-3.5)-r_k^2\end{bmatrix}$$

2. Det första linjestycket kan parametriseras enligt $t \to (t,t)$, $t \in [0,1]$ och den andra delen av kurvan kan skrivas $t \to (1-t, 1+t)$, $t \in [0,1]$ varför kurvintegralen blir

$$\int_\gamma y\,dx + x\,dy = \int_0^1 t\cdot 1 + t\cdot 1\ dt + \int_0^1 (1+t)\cdot(-1) + (1-t)\cdot 1\ dt = 1 - 1 = 0$$

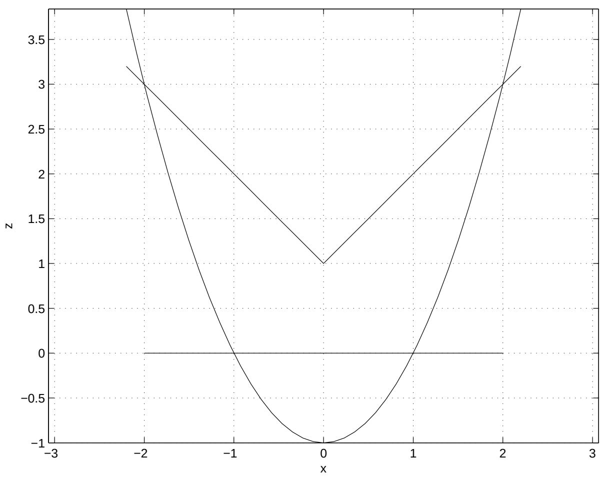
3. Låt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, då definieras ytan (en hyperboloid) av $f(x,y,z) = 0$. Tangentplanet, till hyperboloiden i punkten (a,b,c), har en normalvektor som är parallell med $\nabla f(a,b,c) = 2(a,b,-c)$. Denna vektor skall vara parallell med normalvektorn, $(1,1,1)$ till det givna planet, varför det måste existera en skalfaktor s så att $s(1,1,1) = (a,b,-c)$ (tvåan är inbakad i s). Punkten (a,b,c) måste dessutom ligga på hyperboloiden $a^2+b^2-c^2-1 = 0$ vilket ger $s^2+s^2-(-s)^2-1 = 0$ så att $s = \pm 1$ vilket i sin tur medför att (eftersom (a,b,c) skall ligga i det givna tangentplanet) att $d = s+s-s = \pm 1$.
Svar: $d = \pm 1$.

4. Kurvan $x^4+y^4 = 1$ definierar en kompakt mängd och funktionen f är kontinuerlig. Alltså existerar minsta och största värde. Vi använder Lagranges teknik och sätter gradienten av f och bivillkor som kolonner i en matris vars determinant skall vara noll. Jag har avlägsnat onödiga skalfaktorer från gradienterna.

$$0 = \det\begin{bmatrix} x & x^3\\ 2y & y^3\end{bmatrix} = xy^3 - 2x^3y = xy(y^2-2x^2)$$

som gäller då $x = 0$, $y = 0$ eller $y^2 = 2x^2$. Vi utnyttjar nu bivillkoret för de tre fallen:
$x = 0$ ger $y^4 = 1$ så $y = \pm 1$. $f(0,\pm 1) = 2$.
$y = 0$ ger $x^4 = 1$ så $x = \pm 1$. $f(\pm 1, 0) = 1$.
$y^2 = 2x^2$ ger $5x^4 = 1$ så $x = \pm 1/5^{1/4}$. Funktionen antar värdet $x^2 + 2y^2 = 5x^2 = 5/\sqrt{5} = \sqrt{5} \approx 2.2$.
Så minsta värdet är 1 och största värdet är $\sqrt{5}$.

5. Den kropp som söks ligger "ovanför" en paraboloid och "under" en kon. Dessutom skall kroppen ligga över xy-planet. Kroppen är rotationssymmetrisk. Här en bild i xz-planet:



Man kan beräkna volymen på flera sätt. Jag har valt att räkna ut volymen, V_1, av kroppen mellan kon och paraboloid och sedan subtrahera volymen, V_2, av den kropp som ligger under xy-planet och ovanför paraboloiden.

För den första volymen hittar vi skärningen mellan kon och paraboloid:

$$x^2 + y^2 - 1 = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

som satisfieras av $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Integrationsområdet, D_1, ges av cirkelskivan med radie 2. Inför polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten är r så:

$$V_1 = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2} + 1 - (x^2 + y^2 - 1)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r + 1 - r^2 + 1)\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[r^2 + r^3/3 - r^4/4\right]_0^2 = 16\pi/3$$

Nu till V_2. Integrationsområdet, D_2, ges av cirkelskivan med radie 1. Polära koordinater ger:

$$V_2 = \iint_{D_2} -(x^2 + y^2 - 1)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[r^2/2 - r^4/4\right]_0^1 = \pi/2$$

Den sökta volymen är $V_1 - V_2 = 16\pi/3 - \pi/2 = 29\pi/6$.

6. Vi beräknar derivatorna:

$$f'_x = g' \cdot 2x, \quad f'_y = g', \quad f''_{xx} = g'' \cdot 2x \cdot 2x + g' \cdot 2, \quad f'_{xy} = g'' \cdot 2x$$

Detta i DE blir

$$-2g' + 4x^2 g'' + 2g' + 2x^2 g'' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 g'' = 0$$

För $x \neq 0$ får vi DE $g''(t) = 0$ där $t = x^2 + y$. Lösningen ges av $g(t) = c_1 t + c_2$, där c_1 och c_2 är konstanter, så att $f(x, y) = c_1(x^2 + y) + c_2$.

7. Gränsvärdet i a) existerar inte, testa t.ex. med $y = kx$, $|k| \neq 1$ och låt x gå mot noll.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + k^2 x^2}{x^2 - k^2 x^2}\right)^2 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}\right)^2 = \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}\right)^2$$

som antar olika värden för $k = 0$ och $k = 2$ t.ex.

Gränsvärdet i b) existerar. Polära koordinater, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ger

$$\frac{(x^2 - y^2)^3}{x^2 + y^2} = \frac{(r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))^3}{r^2} = r^4 \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^3 \to 0, r \to 0$$

eftersom $|(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^3|$ är begränsat (en dålig begränsning är åtta, en bra är ett, men båda duger).

8. a) Låt cylindern ha radien r och höjden h. Konens höjd är k. Volym och area hos ströaren blir

$$V = \frac{\pi r^2 k}{3} + \pi r^2 h, \quad A = \pi r \sqrt{r^2 + k^2} + \pi r^2 + 2\pi r h$$

Vi använder ett ickelinjärt olikhetsbivillkor för arean. Om vi antar likhet så saknar problemet lösning! Bivillkoret på standardform lyder $A - 0.03 \leq 0$ (med A definierad enligt ovan). Villkoren på diametern är enkla gränser och villkoren på höjderna blir linjära olikhetsvillkor. Dessa blir $0.07 \leq h + k \leq 0.1$ och $k \geq 0.55\,h$, så på standardform $-h - k \leq -0.07$, $h + k \leq 0.1$ samt $0.55\,h - k \leq 0$.
Jag använder endast en enkel övre gräns för r, höjderna begränsas av de linjära bivillkoren.

Placera (r, h, k) i vektorn w. Mittpunkten i intervallet för radien ger startvärde på r. För att få startvärden på höjderna, antar jag att $k = 0.55\,h$ och $h + k = 0.1$.

b) Vi placerar (r, k, h) i vektorn w. Här följer koden:

```
function salt
Aeq = [];
Beq = [];
A   = [0 1 1; 0 -1 -1; 0 0.55 -1];
B   = [0.1; -0.07; 0];
LB  = [0.015 0 0];
UB  = [0.025 Inf Inf];

w0 = [0.02; 0.1 / 1.55; 0.055 / 1.55];  % startgissning
[w, volym]  = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

r = w(1), h = w(2), k = w(3), volym = -volym

function val = obj_fun(w)
r = w(1); h = w(2); k = w(3);
val = -pi * r^2 * (k / 3 + h);

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
r = w(1); h = w(2); k = w(3);
eq = [];
in_eq = pi * r * (sqrt(r^2 + k^2) + r + 2 * h) - 0.03;
```