Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2012-10-25

1. Låt x, y och z var de tre talen. Vi får:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_k & 2y_k & 2z_k \\ 3x_k^2 & 3y_k^2 & 3z_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k + y_k + z_k - 1 \\ x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - 5 \\ x_k^3 + y_k^3 + z_k^3 - 4 \end{bmatrix}$$

2. Kurvan kan skrivas $t \to (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

$$\int_\gamma y\,dx + x + xy\,dy = \int_0^{\pi/2} \sin t(-\sin t) + (\cos t + \cos t \sin t)\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t - \sin^2 t + \cos^2 t \sin t\,dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2t) + \sin t \cos^2 t\,dt = \big[\sin(2t)/2 - (\cos^3 t)/3\big]_0^{\pi/2} = 1/3$$

3. Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av $z = f(a, b) + (x - a)f'_x(a, b) + (y - b)f'_y(a, b)$. En normalvektor till planet är således $[f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1]$. Om planet skall vara parallellt med xy-planet så skall normalvektorn vara parallell med z-axeln, så att $f'_x(a, b) = 0$ och $f'_y(a, b) = 0$. Detta ger $2ab + 2a = 0$ och $a^2 - 3b^2 = 0$. Den första ekvationen ger $a = 0$ eller $b = -1$. $a = 0$ ger, i den andra ekvationen, $b = 0$ och $b = -1$ ger $a = \pm\sqrt{3}$.
Svar: punkterna är $(0, 0, 3)$, $(\pm\sqrt{3}, -1, 4)$.

4. Bivillkorsmängden blir en sluten kurva (ett plan som skär en cylinder). Låt $g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2$ och $h(x, y, z) = x - z$ och utnyttja Lagrangetekniken med determinanten. Sätt $\det[\nabla f, (1/2)\nabla g, \nabla h] = 0$, dvs

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2yz & y & 0 \\ y^2 & z & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2yz & y & 0 \\ y^2+1 & z & 0 \end{bmatrix} = 2yz^2 - y(y^2+1) = y(2z^2 - y^2 - 1), \quad (\dagger)$$

Vi får två fall: $y = 0$ ger i $g = 0$ att $z = \pm\sqrt{2}$ som i $h = 0$ ger att $x = \pm\sqrt{2}$. De stationära punkterna är $\pm(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ och f:s värden i dessa punkter är $\pm\sqrt{2}$.
När $y \neq 0$ ger $(\dagger)$ att $2z^2 - y^2 - 1 = 0$. Detta med $g = 0$ ger $z^2 = 1$ så att $z = \pm 1$ som i $h = 0$ ger $x = \pm 1$. $g = 0$ ger $y^2 = 2 - z^2$ så att samtliga kritiska punkter blir $(-1, \pm 1, -1)$ och $(1, \pm 1, 1)$. Funktionen antar värdena -2 respektive 2.
Svar: minsta värde -2, största värde 2.

5. Tag fram projektionen, på xy-planet, av skärningskurvan mellan paraboloid och plan. Vi förenklar med hjälp av kvadratkomplettering.

$$x^2 + y^2 = 2 - 3x - 2y \Leftrightarrow (x + 3/2)^2 + (y + 1)^2 = 21/4$$

Kurvan är således en cirkel med centrum i $(-3/2, -1)$ och radie $\sqrt{21/4}$. Integrationsområdet, D, utgörs av cirkelskivan med cirkeln som rand. Ett lämpligt variabelbyte är $x = -3/2 + r\cos\varphi$, $y = -1 + r\sin\varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, \sqrt{21}/2)$. Funktionaldeterminanten blir r. Planet ligger ovanför paraboloiden, så integranden blir "plan-paraboloid" dvs. $21/4 - ((x + 3/2)^2 + (y + 1)^2)$. Volymen blir

$$\iint_D \frac{21}{4} - ((x+3/2)^2 + (y+1)^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{21}/2} \left(\frac{21}{4} - r^2\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi \left[\frac{21r^2}{8} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{21}/2} = \frac{441\pi}{32}$$

6. Vi beräknar derivatorna:

$$f'_x = g' \cdot 2x, \quad f'_y = g' \cdot (-1), \quad f''_{xx} = g'' \cdot 2x \cdot 2x + g' \cdot 2, \quad f'_{xy} = g'' \cdot (-1) \cdot 2x$$

Detta i DE blir

$$-2g' + 4x^2g'' + 2g' - 2x^2g'' = 0 \Leftrightarrow 2x^2g'' = 0$$

För $x \neq 0$ får vi DE $g''(t) = 0$ där $t = x^2 - y$. Lösningen ges av $g(t) = c_1t + c_2$, där c_1 och c_2 är konstanter, så att $f(x, y) = c_1(x^2 - y) + c_2$.

7. Gränsvärdet i a) existerar och är 1. Sätt $t = x^2 + y^2$, vi får då standardgränsvärdet $\lim_{t\to 0}(e^t - 1)/t = 1$.

Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag $x = 0, y \neq 0$:

$$\frac{e^{(x^2+y^4)} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{e^{(y^4)} - 1}{y^2} = y^2\frac{e^{(y^4)} - 1}{y^4} \to 0 \cdot 1 = 0$$

Tag $x \neq 0, y = 0$:

$$\frac{e^{(x^2+y^4)} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} \to 1$$

Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

8. a) Låt klotens centra vara (x_1, y_1, z_1) respektive (x_2, y_2, z_2). Låt z-axeln vara cylinderns symmetriaxel. Placera locket vid $z = H$ och botten vid $z = 0$. Kloten har samma radie r. Volymen blir $2 \cdot (4\pi r^3)/3$ så det räcker att maximera r för att få maximal volym, varför objektfunktionen får returnera $-r$.

Vi får lägga till bivillkor så att kloten ryms i burken och så att de inte skär varandra. De linjära olikhetsbivillkoren $r - z_k \leq 0$ och $z_k + r \leq H$ ser till att klot nummer $k = 1, 2$ inte går utanför botten och lock. De ickelinjära olikhetsbivillkoren $|(x_k, y_k)| + r - R \leq 0$ tillser att inte någon av kloten går genom cylinderväggen ($|\ |$ betecknar vektorlängd).
$2r - |(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)| \leq 0$ gör att kloten inte skär varandra. Alla bivillkoren ovan är skrivna på standardform.
Vi placerar variablerna i vektorn $w = (r, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$.
Som enkla gränser kan vi ta `LB = [0, -R, -R, 0, -R, -R, 0]` och `UB = [R, R, R, H, R, R, H]`.
Endast gränserna för r är nödvändiga eftersom övriga bivillkor ger lämpliga gränser på de andra variablerna. Startgissningen är inte så kinkig i denna uppgift bara man undviker att ha $x_1 = y_1 = x_2 = z_2 = 0$ eftersom `fmincon` då hittar ett lokalt minimum som inte är optimalt.

```
function burk
global R

H = 4.1;
R = 1.8;
Aeq = []; Beq = [];

%       r  x1 y1 z1  x2 y2 z2
A   = [1   0  0 -1   0  0  0
       1   0  0  0   0  0 -1
       1   0  0  1   0  0  0
       1   0  0  0   0  0  1];
B = [0 0 H H]';

LB  = [0  -R -R 0  -R -R 0 ]';
UB  = [R   R  R H   R  R H ]';
```

```
w0 = [1 0.5 0 1 0 0 2];  % startgissning
w  = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)

r = w(1)
volym = 8 * pi * r^3 / 3
xyz_1 = w(2:4)
xyz_2 = w(5:7)

function val = obj_fun(w)
val = -w(1);

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
global R
eq = [];
in_eq = [2 * w(1) - norm(w(2:4) - w(5:7))
         norm(w(2:3)) + w(1) - R
         norm(w(5:6)) + w(1) - R];
```

Överkurs: uppgiften går att lösa på ett bättre sätt, men ovanstående räcker för full poäng. En nackdel med lösningen ovan är att minimum inte är entydigt. Vi kan ju rotera placeringen av kloten kring z-axeln och ändå få samma volym. Denna mångtydighet skulle kunna göra det svårare för `fmincon` att hitta minimum.

Om vi låser $y_1 = 0$ och kräver $0 \leq x_1$ så slipper vi mångtydigheten. Tänker man efter så inser man att $y_2 = 0$ är optimalt. På detta sätt blir vi också av med de två y-variablerna. De ickelinjära olikhets-bivillkoren $|(x_k, y_k)| + r - R \leq 0$ kan då skrivas som linjära bivillkor, $x_1 + r \leq R$, $-R \leq x_2 - r$ och $x_2 + r <= R$.

Man kan minska antalet bivillkor genom att införa villkoret $z_1 \leq z_2$. Det räcker då att kontrollera $r - z_1 \leq 0$ och $z_2 + r \leq H$.