# **Tentamen:** Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2011-10-20, V

| | |
|---|---|
| Skrivtid: | 08.30-12.30. |
| Ansvarig: | Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se. |
| Vakt: | Richard Lärkäng, tel. 0703-088304. |
| | Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30. |
| Resultat: | E-post från LADOK. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum. |
| Betygsgränser: | 10, 15, 20 poäng av maximalt 25. |
| Lösningsförslag: | På www efter kl. 19. |
| **Hjälpmedel**: | Inga, förutom bifogat formelblad. |

**Iakttag följande:**
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

**Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.**

Jag har lagt `fmincon`-uppgiften sist eftersom bilden inte fick plats på första sidan.

1. Vi vill hitta stationära punkter (eng. critical points) till $f(x, y) = x(e^x + \sin(2 + y)) - e^y \cos(x - 3)$.
   a) Konstruera ett system av ekvationer vars lösningar är de stationära punkterna.
   b) Ställ upp Newtons metod för systemet.
   Försök **inte** att lösa problemet för hand. (3p)

2. Beräkna
$$\int_\gamma ye^x + y^2\ dx + e^x\ dy$$
   där $\gamma$ är parabelbågen $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. (3p)

3. Låt $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Bestäm alla $(x, y)$ där tangentplanet till $f$, i punkten $(x, y, f(x, y))$, bildar vinkeln $\pi/6$ med z-axeln. ($\pi/6$ är alltså den minsta vinkeln mellan z-axeln och planets yta.) (3p)

4. Bestäm största och minsta värde av funktionen, $f(x, y, z) = xyz$, då $0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z$ och $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1$, där $a$, $b$ och $c$ är positiva tal. (3p)

5. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = -x^2/2 - (2/3)y^2 + 2x + 4$, $z = x^2/2 + y^2/3 + 4y$ **och** $x = 1$. Kroppen innehåller punkten $(1, 0, 1)$. (3p)

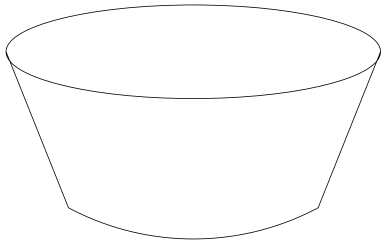
6. Bestäm alla lösningar, $u(x, y)$, till differentialekvationen nedan, genom att göra variabelbytet, $s = x + y$ och $t = x - y$:
$$u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0, \qquad (3p)$$

7. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} \qquad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x^2+y^3)}-1}{x^2+y^2}, \qquad \text{OBS}: y^3$$

(3p)

8. I bilden nedan ser du en badbalja i form av en rotationssymmetrisk trunkerad kon.



Vi vill maximera baljans volym givet att dessa area (mantelytans area plus bottenarean) ej överskrider $9\,\mathrm{m}^2$. Vinkeln mellan botten och mantelyta får ej understiga $120°$.

a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.
**Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!**

b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut maximal volym samt värdena på de variabler som bestämmer baljans form. Du behöver **inte** skicka med `options`. Lös **inte** problemet för hand, det ger **inga** poäng.

**Ledning**: mantelytans area hos en trunkerad kon är $\pi(r_1+r_2)\sqrt{(r_1-r_2)^2+h^2}$, där $h$ är höjden och $r_1$ och $r_2$ radierna i de två cirklarna.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                     enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq    linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0      ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(4p)