Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2011-08-27

1. Låt halva lillaxeln vara a och halva storaxeln b. Med centrum (p,p) (eftersom $y=x$) blir ellipsens ekvation då $(p-x)^2/a^2+(p-y)^2/b^2=1$. De tre ekvationerna lyder:

$$\begin{aligned}(p-c_1)^2/a^2+(p-d_1)^2/b^2-1 &= 0\\(p-c_2)^2/a^2+(p-d_2)^2/b^2-1 &= 0\\(p-c_3)^2/a^2+(p-d_3)^2/b^2-1 &= 0\end{aligned}$$

så att Newtons metod blir

$$\begin{bmatrix} p_{k+1}\\ a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_k\\ a_k\\ b_k\end{bmatrix}-\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}(p_k-c_1)^2/a_k^2+(p_k-d_1)^2/b_k^2-1\\(p_k-c_2)^2/a_k^2+(p_k-d_2)^2/b_k^2-1\\(p_k-c_3)^2/a_k^2+(p_k-d_3)^2/b_k^2-1\end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J}=2\begin{bmatrix}(p_k-c_1)/a_k^2+(p_k-d_1)/b_k^2 & -(p_k-c_1)^2/a_k^3 & -(p_k-d_1)^2/b_k^3\\(p_k-c_2)/a_k^2+(p_k-d_2)/b_k^2 & -(p_k-c_2)^2/a_k^3 & -(p_k-d_2)^2/b_k^3\\(p_k-c_3)/a_k^2+(p_k-d_3)/b_k^2 & -(p_k-c_3)^2/a_k^3 & -(p_k-d_3)^2/b_k^3\end{bmatrix}$$

2. a) Låt (x,y,z), $x,y,z>0$ vara en hörnpunkt på lådan. För att få maximal volym så måste hörnpunkten ligga på ellipsoiden (uppfylla ellipsoidens ekvation). Pga ledningen så är hörnen $(\pm x,\pm y,\pm z)$ alla tecken-kombinationer. Volymen ges av $8xyz$. Enkla gränser: $0\le x\le\sqrt{1.2}$, $0\le y\le\sqrt{2.7}, 0\le z\le\sqrt{3.3}$.
Det enda bivillkoret (förutom de enkla gränserna) är det ickelinjära likhetsbivillkoret $x^2/1.2+y^2/2.7+z^2/3.3=1$.
b) Vi placerar (x,y,z) i vektorn $w=[x,y,z]$. Här följer koden:

```
function box
A = []; B = []; Aeq = []; Beq = [];
LB  = zeros(3, 1);
UB  = sqrt([1.2 2.7 3.3]');

w0 = rand(3, 1);  % startgissning
w  = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut kantlängder och volym
kantl = 2 * w
volym = 8 * prod(w)

function volym = obj_fun(w)
volym = -prod(w);

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
in_eq = [];
eq    = w(1)^2/1.2 + w(2)^2/2.7 + w(3)^2/3.3 - 1;
```

3. Vi parametriserar $-\gamma$ med polära koordinater $x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ \varphi\in(\pi,2\pi)$. Integralens värde är (notera minustecknet):

$$-\int_\pi^{2\pi}(3\cos^2\varphi\,\sin\varphi+1)(-\sin\varphi)+3\cos\varphi\,\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\int_\pi^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=-2$$

4. Vi ser att $(a, b) = (-2, -7)$. Tangentriktningen ges av derivatorna av koordinatfunktionerna, så $(1-2t, -3t^2)$, och då $t = 2$, $(-3, -12)$ (och vi lika gärna byta riktning på vektorn och dividera med tre). Parameterframställningen kan då skrivas
$$t \to (-2, -7) + t(1, 4)$$
$(4, -1)$ är ortogonal mot riktningsvektorn ovan, varför ekvationen blir
$$0 = 4(x+2) - 1(y+7) \ \text{ eller } \ 4x - y + 1 = 0$$
Slutligen c). Som normalvektor kan vi ta riktningsvektorn till tangentlinjen så ekvationen blir
$$0 = 1(x+2) + 4(y+7) \ \text{ eller } \ x + 4y + 30 = 0$$

5. Området utgörs av enhetscirkeln, så mängden är kompakt. Eftersom dessutom funktionen är kontinuerlig, så existerar största och minsta värde.

   Vi använder Lagrange-tekniken (med determinanten) och placerar gradienten av f och av bivillkoret $x^2 + y^2 - 1$ som kolonner i en matris och sätter dess determinant till noll vilket ger ekvationen $2xy + y^2 + y - (2xy + x^2 + x) = 0$ eller $y^2 - x^2 + (y - x) = 0$ eller $(y - x)(y + x + 1) = 0$. Om den första faktorn är noll, $y = x$, så ger bivillkoret $2x^2 = 1$ så att $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$. Motsvarande funktionsvärden är $3/2 \pm \sqrt{2} \approx 0.086$ respektive 2.91.
   Antag nu att den andra faktorn är noll, $y+x+1 = 0$. Bivillkoret ger $x^2+(x+1)^2 = 1$ vilket, efter förenkling ger, $x(x + 1) = 0$ så att $x = 0$ eller $x = -1$. Motsvarande y-värden är -1 samt $y = 0$. Funktionsvärdena är 0, 2, 0. Så, minsta värde är 0 och största $3/2 + \sqrt{2}$.

6. Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z till noll:
$$9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)^2 + (2y - 1)^2 = 16$$
Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x, y)\ :\ (3x+1)^2+(2y-1)^2 \le 4^2\ \}$. Vi inför elliptisk-polära koordinater: $x = -1/3 + (r/3)\cos\varphi,\ y = 1/2 + (r/2)\sin\varphi,\ 0 \le r \le 4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, där funktionaldeterminanten blir $r/6$. Volymen kan alltså skrivas:
$$\iint_D -(9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 16)\ dxdy = \iint_D 16 - ((3x + 1)^2 + (2y - 1)^2)\ dxdy =$$
$$\int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (16 - r^2) r/6\ d\varphi \right)\ dr = \pi/3 \int_0^4 16r - r^3\ dr = \pi/3 \left[8r^2 - r^4/4\right]_0^4 = 64\pi/3$$

7. Vi deriverar $u(s(x, y), t(x, y))$ med avseende på x och y:
$$u'_x = u'_s s'_x + u'_t t'_x = u'_s \cdot 1 + u'_t y$$
$$u'_y = u'_s s'_y + u'_t t'_y = u'_s \cdot (-1) + u'_t x$$
Detta i DE ger
$$x^2 - y^2 = x(u'_s + u'_t y) - y(-u'_s + u'_t x) = (x + y)u'_s + (xy - xy)u'_t$$
så att $u'_s = x - y$ eller $u'_s = s$ så att $u = s^2/2 + g(t)$, där g är godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Lösningen är således $u(x, y) = (x - y)^2/2 + g(xy)$.

8. Gränsvärdet i a) existerar.
$$\frac{\sin(x^2 + y^2)\sin(x^2 - y^2)}{x^4 - y^4} = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{\sin(t)}{t} \cdot \frac{\sin(s)}{s} \to 1, s, t \to 0$$
där vi satt $s = x^2 + y^2$ och $t = x^2 - y^2$.

   Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag $x = y \ne 0$ gränsvärdet blir då 0. Tag $x \ne 0, y = 0$ gränsvärdet blir då 1. Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.