

Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2010-10-21, V

Skrivtid: 08.30-12.30.
Ansvarig: Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt: Ida Säfström, tel. 0703-088304.
Frågor om tentamen kan ställas omkring 9.30 och 11.30.
Resultat: Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser: 10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningförslag: På www efter kl. 19.
Hjälpmedel: Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde ($\tilde{}$).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

1. Givet tre distinkta punkter (a_1, b_1) , (a_2, b_2) och (a_3, b_3) vill vi bestämma centrum och radie för den cirkel som går genom punkterna. Formulera ekvationerna som behövs för att bestämma cirkeln och ställ sedan upp Newtons metod för ekvationerna. Försök **inte** att lösa problemet för hand. (3p)
2. Vi har en låda med lock (rätblock). Lådan har måtten $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1.3\text{ m}$. I lådan vill vi packa tre klot med samma radie. Kloten måste rymmas i lådan och vi vill att klotens sammanlagda volym skall maximeras.
 - a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna.**Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng på uppgiften!**
 - b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut volymen samt de värden som behövs för att placera kloten i lådan. Du behöver **inte** skicka med `options`. Lös **inte** problemet för hand, det ger **inga** poäng.

`fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB          enkla gränser
  A * x <= B,           Aeq * x = Beq   linjära bivillkor
  C(x) <= 0,           Ceq(x) = 0      ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x) och function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

(4p)

3. Beräkna

$$\int_{\gamma} 2xy - y \, dx + x^2y \, dy$$

där γ är kurvan $|x| + |y| = 2$ genomlöpt i positiv led. (3p)

4. Linjerna $2x + 3y = 7$ och $x - y = 1$ skär varandra i en punkt, kalla den (a, b) . Från punkten (a, b) kan man röra sig i fyra riktningar utmed de räta linjerna. Avgör i vilken av dessa fyra riktningar som $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$ växer snabbast respektive avtar snabbast. Beräkna också respektive derivata. (3p)

5. Bestäm största och minsta värde av funktionen, $f(x, y) = (x + y)^2 + (x - 1)(y - 2)$, i området $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$. Rita också en bild av området. (3p)

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$$z = x^2 + y^2 \text{ och } z = 5x^2 + 10y^2 + 4x - 6y - 7 \quad (3p)$$

7. Låt $u(x, y)$ vara en lösning till följande differentialekvation:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 1$$

Vi vill bestämma alla lösningar på formen $u(x, y) = g(r)$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Lösningen beror alltså bara på avståndet från origo och inte på rotationsvinkeln. Visa att vi får följande ordinära differentialekvation för g :

$$g''(r) + \frac{g'(r)}{r} = 1 \quad (3p)$$

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

$$\text{a) } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xy)}{yz} \qquad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y}{x^2 + (x+y)^2}$$

(3p)