Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2010-08-27

1. Ekvationen är $1/x - y = 0$ som ger $x_{k+1} = 2x_k - yx_k^2$.

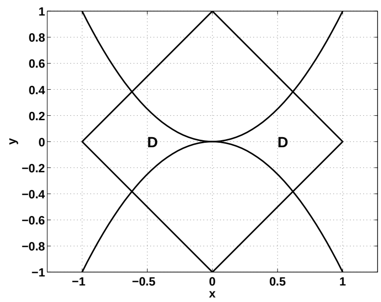
2. a) Vi måste bli av med absolutbeloppen och skriver om $|x| + |y| <= 1$ som

$$\begin{cases} x + y \le 1 \\ -x + y \le 1 \\ -x - y \le 1 \\ x - y \le 1 \end{cases}$$

och $|y| \le x^2$ som

$$\begin{cases} -x^2 + y \le 0 \\ -x^2 - y \le 0 \end{cases}$$

Bivillkoren samt objektfunktionen är nu deriverbara.
Enkla gränser får vi från $|x|+|y| <= 1$, både x och y måste ligga i intervallet $(-1, 1)$. Här en bild. Tillåtna punkter ligger inuti kvadraten och mellan parabelbågarna (området markerat med D).



b) Vi har två variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $w = [x, y]^T$.
Bivillkoren är redan skrivna på standardform ovan. Här följer koden:

```
function derivator
A = [ 1  1; -1  1; -1 -1; 1 -1 ];
B = ones(4, 1);

Aeq = []; Beq = [];
LB = -ones(2, 1);   UB = ones(2, 1);

w0 = 0.5 - rand(2, 1);  % startgissning

[w, fmin] = fmincon(@obj_fun, w0, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun);

% Skriv ut optimla x, y samt f(x, y)
[w(1), w(2), fmin]

function val = obj_fun(w)
val = 0.4 * sin(3 * w(1) * w(2) + w(2)) + 1;

function [in_eq, eq] = constr_fun(w)
in_eq = [-w(1)^2+w(2); -w(1)^2-w(2)];
eq    = [];
```

3. Vi parametriserar första delen av γ genom $t \to (0,t), t \in [0,1]$ och den andra delen med $t \to (t,1), t \in [0,1]$. Integralen kan då skrivas

$$\int_0^1 (te^0 + t^2) \cdot 0 + e^0 \cdot 1 \; dt + \int_0^1 (1 \cdot e^t + 1) \cdot 1 + e^t \cdot 0 \; dt = 1 + e - 1 + 1 = e + 1$$

4. Ytans normal (gradienten), i punkten, skall vara parallell med planets normal, $(1,0,-1)$. Gradienten är $(y^2+1, 2xy, -2z)$ och det skall alltså existera en skalär, λ, så att $(y^2+1, 2xy, -2z) = \lambda\,(1,0,-1)$. Detta ger: $y^2+1=\lambda$, $xy=0$ och $z=\lambda/2$. Punkten, (x,y,z) skall också ligga i ytan så att $x\lambda - \lambda^2/4 + 1 = 0$. Vi skall alltså lösa följande system av ekvationer:

$$\begin{cases} y^2 + 1 = \lambda \\ xy = 0 \\ z = \lambda/2 \\ x\lambda - \lambda^2/4 + 1 = 0 \end{cases}$$

Vi studerar två fall (från ekv. 2). $x = 0$ eller $y = 0$.
$x = 0$ ger i ekv. 4 att $\lambda = 2$ (ty $\lambda > 0$ från ekv. 1). Detta ger $z = 1$ samt $y = \pm 1$ så punkterna är $(0, \pm 1, 1)$.
Nu till fallet $y = 0$. Ekv. 1 ger $\lambda = 1$ så att $z = 1/2$ och $x = -3/4$, punkten är alltså $(-3/4, 0, 1/2)$.

5. D består av alla punkter, i övre halvplanet, som ligger på enhetscirkeln. Mängden är kompakt (en cirkelbåge) och funktionen är kontinuerlig, alltså existerar största och minsta värde. Dessa antas i en inre punkt eller i en randpunkt.

Randpunkterna är $(-1,0)$ och $(1,0)$ och motsvarande funktionsvärden är -1 respektive 1.

Nu till de inre punkterna. I en extrempunkt är funktionens gradient och bivillkorets ($x^2+y^2=1$) gradient parallella, vilket vi kan formulera med hjälp av följande determinantvillkor (gradienterna som kolonner och onödiga skalfaktorer avlägsnade):

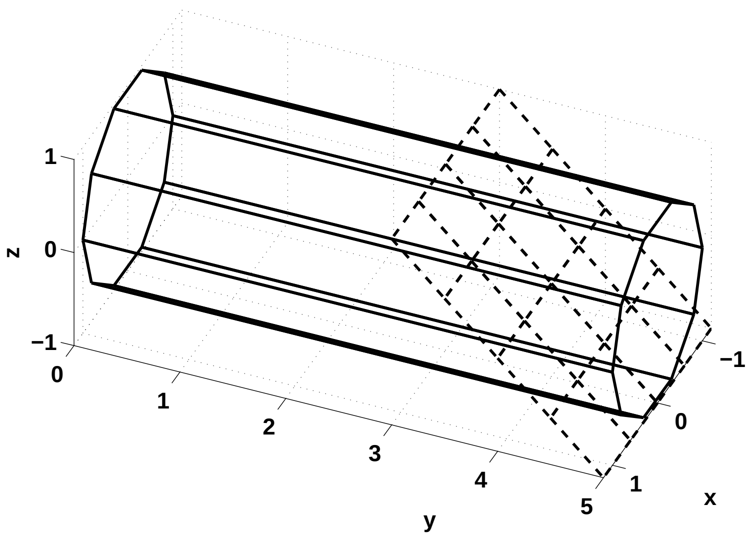
$$\begin{vmatrix} y+1 & x \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - x^2 = 0$$

Vi utnyttjar nu bivillkoret, eliminerar x^2, och får ekvationen $2y^2 + y - 1 = 0$, som har rötterna $y = -1$ (tillhör inte området) samt $y = 1/2$. Den senare roten ger $x = \pm\sqrt{3}/2$. Vi får punkterna $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$ samt $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ som båda tillhör området. Motsvarande funktionsvärden är $\pm 3\sqrt{3}/4 \approx \pm 1.3$. Så, det största värdet är $f(\sqrt{3}/2, 1/2) = 3\sqrt{3}/4$ och det minsta $f(-\sqrt{3}/2, 1/2) = -3\sqrt{3}/4$.

6. Låt $K = \{(x,y,z) \mid x^2 + z^2 \le 1, \;\; y \ge 0, \;\; y + z \le 4\}$. Då kan massan skrivas

$$m = \iiint_K \rho(x,y,z)\; dx\, dy\, dz$$

Kroppen ser ut som en snett kapad stång, här är en bild (med grov upplösning):



Det är enklast att integrera i y-led först, integrationsområdet i xz-planet är ju då enhetscirkelskivan, $D = \{ (x,z) \mid x^2 + z^2 \le 1 \}$.

$$m = \iint_D \left(\int_0^{4-z} (4-z)2y\ dy \right) dxdz = \iint_D \left[(4-z)y^2\ dy \right]_{y=0}^{y=4-z} dxdz = \iint_D (4-z)^3\ dxdz$$

Polära koordinater, $x = r\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi,\ r \in (0,1),\ \varphi \in (0, 2\pi)$ med funktionaldeterminant r, ger:

$$m = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (4 - r\sin\varphi)^3\ r\ d\varphi \right) dr = \int_0^1 r \left(\int_0^{2\pi} 64 - 48r\sin\varphi + 12r^2\sin^2\varphi - r^3\sin^3\varphi)\ d\varphi \right) dr$$

När vi integrerar med avseende på φ kan vi flytta ut r utanför integralen. Det kvarstår att beräkna integralerna

$$\int_0^{2\pi} \sin^k \varphi\ d\varphi,\ k = 1,2,3$$

Udda k ger värdet noll (tänk i termer av areor), $k = 2$-fallet löser vi som vanligt med dubbla vinkeln (se formelbladet):

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\ d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi)/2\ d\varphi = \cdots = \pi$$

Massan blir alltså:

$$m = \int_0^1 r(64 \cdot 2\pi + 12r^2\pi)dr = \left[64\pi r^2 + 3r^4\pi \right]_0^1 = 67\pi$$

7. Vi deriverar:

$$f'_x = g'(r)\, r'_x = g'(r)x/\sqrt{x^2+y^2} = xg'(r)/r$$
$$f'_y = g'(r)\, r'_y = g'(r)y/\sqrt{x^2+y^2} = yg'(r)/r$$

Vi sätter nu in detta i differentialekvationen och får:

$$(x^2 + y^2)g'(r)/r = 1/r^3$$

vilket förenklas till $g'(r) = 1/r^4$ som har lösningen $g(r) = -1/(3r^3) + c$. Detta uttryckt i de ursprungliga variablerna blir slutligen:

$$f(x,y) = \frac{-1}{3(x^2+y^2)^{3/2}} + c$$

Nu till den speciella lösningen. $2 = -1/(3 \cdot 1) + c$ så att $c = 7/3$ och

$$f(x, y) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

8. Gränsvärdet i a) existerar inte. För att bevisa detta låter vi $y = 1 - \alpha\, x$ då $x \to 0$ och får

$$\frac{e^x - (1 - \alpha\, x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + \alpha \to 1 + \alpha, \quad x \to 0$$

Olika vägar mot $(0, 1)$ kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.

Gränsvärdet existerar och är 1, ty vi har en produkt av standardgränsvärden som alla är ett.