Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2009-08-28

1. Vektorn måste tydligen ha två element (annars är inte $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ definierade). Låt $\mathbf{x} = [a,\, b]^T$ (för att slippa en del index, naturligare vore x_1 och x_2). $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1 \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ (men $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är ingen lösning) blir, efter lite räknande, $3a^2 + 6ab + 2b^2 = 0$. Normeringsvillkoret, $|\mathbf{x}| = 1$, kan skrivas $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6a_k + 6b_k & 6a_k + 4b_k \\ 2a_k & 2b_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3a_k^2 + 6a_kb_k + 2b_k^2 \\ a_k^2 + b_k^2 - 1 \end{bmatrix}$$

2. a) Inför L för längden, h för höjden, b_1 för undre bredd och b_2 för övre. Längden på den sneda "höjden", d ges av Pythagoras sats, $d^2 = h^2 + ((b_2 - b_1)/2)^2$. Lockets area blir Lb_2, sidoarean $S = (b_1 + b_2)h/2$, volymen $V = SL$ och totala plåtarean blir $A = 2S + b_1L + 2dL + Lb_2$ (sidoytor + botten + långsidor + lock).

   b) Nu till Matlabkoden. Vi har fyra variabler, som vi placerar i en kolonnvektor: $x = [L, h, b_1, b_2]^T$. De enkla gränserna blir: `LB = [0 0.3 0.3 0.3]'` och `UB = [1.2 0.45 0.65 0.65]'`. Lockets area skall vara minst dubbelt så stor som bottenarean ger villkoret $2Lb_1 \le Lb_2$ som kan förenklas till $2b_1 \le b_2$, om på standardform kan skrivas som det linjära olikhetsbivillkoret $2b_1 - b_2 \le 0$. Villkoret "undre bredd $\le$ övre bredd" blir då automatiskt uppfyllt, så det linjära olikhetsbivillkoret lyder:

$$2b_1 - b_2 \le 0$$

   De ickelinjära villkoret skrivs (där A är arean ovan):

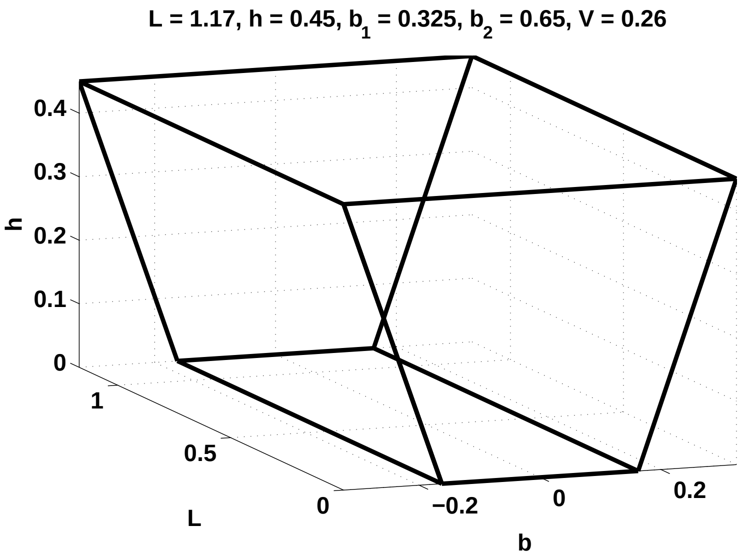
$$A - 2.7 \le 0$$

   Här följer koden, lite hoptryckt för att spara plats.

```
function balja
% Enkla gränser
LB = [0    0.3 0.3  0.3]';
UB = [1.2 0.45 0.65 0.65]';

% Linjära olikhetsbivillkor:
A = [0 0 2 -1];   B = 0;

Aeq = []; Beq = []; % Inga linjär likhetsbivillkor

x_guess = rand(4, 1);
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)

% Skriv ut värdena
L = x_opt(1), h = x_opt(2), b1 = x_opt(3), b2 = x_opt(4), vol = -obj_val

function obj_val = obj_fun(x)
L = x(1); h = x(2); b1 = x(3); b2 = x(4); % packa upp
S = (b1 + b2) * h * 0.5;

obj_val = -S * L;

function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
L = x(1); h = x(2); b1 = x(3); b2 = x(4);  % packa upp
```

```
d = sqrt(h^2 + (0.5 * (b2 - b1))^2);
S = (b1 + b2) * h * 0.5;
A = 2 * S + L * (b1 + 2 * d + b2);

in_eq = A - 2.7;
eq    = [];
```

Här är en bild som visar optimala utformningen:



3. Låt kurvan ges av $t \to (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$. Vi kontrollerar först om $((x(t), y(t))$ ligger på en cirkel. Undersökningen underlättas av om vi jämför med den vanliga parametriseringen av enhetscirkeln $t \to (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Det gäller att $x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ och cirkeln genomlöps ju moturs när parametern, vinkeln, går från 0 till 2π. Om man skalar $(\cos t, \sin t)$, med radien $r > 0$, och translaterar, med (a, b), får man $(a+r\cos t, b+r\sin t)$ som alltså är en cirkel med radie r och centrum (a, b).

   Detta medför att γ_1 är en cirkel med radie 2 och centrum $(1, -3)$.
   γ_2 är en cirkel med centrum i origo och radie 3 (sätt $s = t^2$).
   γ_3 är en del av en rät linje. Detta syns tydligt om vi sätter $s = t^2$ och skriver kurvan som $s \to (3, 4)+s(2, 2)$.
   γ_4 är ingen fullständig cirkel, bara en kvartscirkel i första kvadranten. Det gäller att $x^2(t) + y^2(t) = 1$.
   γ_5 är en ellips som inte är en cirkel. $((x(t) - 1)/2)^2 + ((y(t) + 3)/4)^2 = 1$.
   γ_6 är en enhetscirkeln, ty punkterna ligger på en cirkel med radie ett $x^2(t)+y^2(t) = (1-t^2)^2+(t\sqrt{2 - t^2})^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + t^2(2 - t^2) = 1$. $x(t), y(t)$ är dessutom kontinuerliga funktioner som går genom punkterna $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ (för $t = -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}$)

   Så, γ_1, γ_2 och γ_6 är cirklar, övriga kurvor är det inte.

4. a) f växer snabbast i gradientens riktning, $\nabla f(x, y) = (2x + 2y - 1, -2y + 2x + 2)$ och i punkten $(1, -1)$ blir det $(-1, 6)$ (eller varje positiv multipel av denna).
   b) f är lokalt konstant (har riktningsderivata noll) för riktningar som är ortogonala mot gradienten, dvs. riktningarna $\pm(6, 1)$.
   c) En normalvektor till linjen är $(3, 1)$ varför en normerad riktningsvektor är $\mathbf{v} = (1, -3)/\sqrt{10}$. Riktningsderivatan blir:

$$f'_{\mathbf{v}}(1, -1) = (-1, 6) \cdot (1, -3)/\sqrt{10} = -19/\sqrt{10} < 0$$

   Vi skall alltså röra oss i riktningen $(1, -3)$.

5. Vi söker först nollställen till gradienten grad$f = [2x+2y+y^2,\ 2x+2xy] = [2x+2y+y^2,\ 2x(1+y)]$ vilket ger oss de stationära punkterna. Vi börjar med den andra ekvationen, $2x(1+y)=0$ som har lösningarna $x=0$ eller $y=-1$. $x=0$ i den första ekvationen, $2x+2y+y^2=0$ ger $y(2+y)=0$ så att $y=0$ eller $y=-2$. $y=-1$ i den första ekvationen ger $2x-1=0$ så att $x=1/2$. Vi har alltså hittat följande stationära punkter: $(0,0)$, $(0,-2)$, $(1/2,-1)$. Nu till deras karaktär. Vi sätter upp den kvadratiska formen:
$$Q(h,k) = 2h^2 + 2(2+2y)hk + 2xk^2 = 2(h^2 + 2(1+y)hk + xk^2)$$
Den inledande tvåan ändrar inte tecknet så det räcker att studera $Q(h,k)/2$.
$$(x,y) = (0,0) \Rightarrow Q(h,k)/2 = h^2 + 2hk = h(h+2k)$$
vilken är indefinit. Tag t.ex. $(h,k)=(1,0)$ ger ett positivt värde och $(h,k)=(1,-1)$ ger ett negativt värde. $(0,0)$ är alltså en sadelpunkt.
$$(x,y) = (0,-2) \Rightarrow Q(h,k)/2 = h^2 - 2hk = h(h-2k)$$
är också en sadelpunkt (testa med $(h,k)=(1,0)$ respektive $(1,1)$).
$$(x,y) = (1/2,-1) \Rightarrow Q(h,k)/2 = h^2 + k^2/2$$
som är positivt definit (kvadratsumma som är noll endast när $(h,k)=(0,0)$) så $(1/2,-1)$ är en strängt lokal minimipunkt.

6. Ytorna är två paraboloider som innesluter en äggformad kropp. Vi bestämmer skärningskurvan i x-y-planet genom att sätta z-värdena lika och kvadratkomplettera:
$$10 - x^2 - y^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2(x^2+2x+y^2) = 6 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4$$
Integrationsområdet ges av $D = \{\ (x,y)\ :\ (x+1)^2+y^2 \le 4\ \}$. Vi inför polära koordinater $x = -1 + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, där funktionaldeterminanten blir r. Volymen kan alltså skrivas:
$$\iint_D 10 - x^2 - y^2 - [(x+2)^2 + y^2]\ dxdy = 2\iint_D 4 - (x+1)^2 - y^2\ dxdy =$$
$$2\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (4-r^2)r\ \ d\varphi\right) dr = 4\pi[2r^2 - r^4/4]_0^2 = 16\pi$$

7. Vi vill använda Greens formel, men eftersom området inte är slutet lägger vi till linjestycket (kalla det γ_e) från $(0,1)$ till $(0,0)$ och subtraherar sedan kurvintegralen över det extra linjestycket. Vi noterar att $\gamma+\gamma_e$ har positiv orientering. Sätt $P = e^{y^2} - y^2$ och $Q = 2xye^{y^2} + y^2$. Vi har då
$$\int_\gamma P\ dx + Q\ dy = \underbrace{\int_{\gamma+\gamma_e} P\ dx + Q\ dy}_{\text{Green}} - \int_{\gamma_e} P\ dx + Q\ dy = \iint_D Q'_x - P'_y\ dxdy - \int_{\gamma_e} P\ dx + Q\ dy$$
Vi använder Greens formel på den del som jag markerat med Green, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$. Så:
$$\int_{\gamma+\gamma_e} P\ dx + Q\ dy = \iint_D 2ye^{y^2} - (2ye^{y^2} - 2y)\ dxdy = \iint_D 2y\ dxdy =$$
$$\int_0^1 \left(\int_x^1 2y\ dy\right) dx = \int_0^1 \left[y^2\ \right]_{y=x}^{y=1} dx \int_0^1 1 - x^2\ dx = 2/3$$
Vi parametriserar γ_e genom $t \to (0, 1-t), t \in [0,1]$, så att kurvintegralen blir (notera att "$dx = 0$"):
$$\int_{\gamma_e} P\ dx + Q\ dy = \int_{\gamma_e} Q\ dy = \int_0^1 (1-t)^2 \cdot (-1) \cdot dt = \cdots = -1/3$$
Den sökta integralen har alltså värdet $2/3 - (-1/3) = 1$.

8. Gränsvärdet i a) existerar och har värdet ett, ty:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \cdot 1 = 1$$

där vi använder standardgränsvärdet från envariabelkursen.

Gränsvärdet i b) existerar inte. Testa med $x \neq 0$, $y = z = 0$:

$$\frac{|x+y+z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x|}{|x|} \to 1$$

Testa nu med $x = y = z$:

$$\frac{|x+y+z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{|3x|}{\sqrt{3x^2}} = \frac{\sqrt{3}\,|x|}{|x|} \to \sqrt{3}$$

Olika vägar mot origo kan alltså ge olika gränsvärden, varför gränsvärdet inte existerar.