Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE041, (MVE040), Chalmers, 2009-01-10, V

Skrivtid:	08.30-12.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Magnus Goffeng, tel. 0762-721860.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 11.30.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	Måndag på www.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

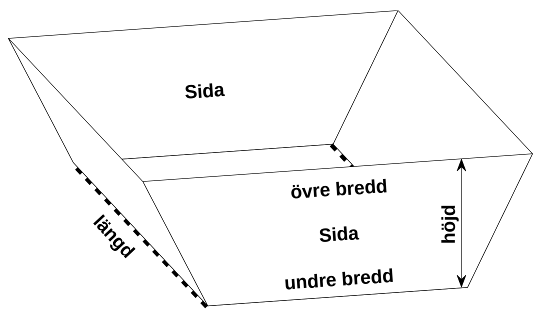
---

1. Vi söker en kolonnvektor, $\mathbf{x}$, som satisfierar villkoren:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1.4 \text{ och } \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0.2, \text{ med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ställ upp ett system av ekvationer, för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

2.



Vi vill tillverka en tvättbalja, i rostfri plåt, enligt skissen till höger. Baljan är tillverkad av två sidostycken (**Sida**), ortogonala mot botten, och en bockad rektangulär plåt (de streckade linjerna visar var plåten är bockad). Plåten är bockad lika mycket (samma vinkel) på varje sida. Baljan har plan botten. Vi vill maximera baljans volym under följande bivillkor.
Totala plåtarean får inte överstiga 2m^2. Längden får inte överstiga 1.2m. $0.3\text{m} \leq$ undre bredd $\leq$ övre bredd $\leq 0.65\text{m}$. $0.3\text{m} \leq$ höjd $\leq 0.45\text{m}$.

Använd `fmincon` för att lösa problemet (lös det **inte** för hand). `fmincon` kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                         enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq        linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0          ickelinjära bivillkor
```

Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

a) Gör en matematisk formulering av problemställningen. Slarva inte med detaljerna. Tala i detalj om vilka variabler du använder, till exempel. **Om jag inte förstår vad du menar får du inga poäng!**
b) Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa problemet. Ditt program skall skriva ut de värden som behövs för att tillverka baljan. Du behöver **inte** skicka med `options`. (3p)

3. Visa att de finns två räta linjer som går igenom punkten $P = (1, 1, 2)$ och som ligger helt i ytan:

$$x^2 - y^2 + 2xy - x + 2y - 1 - z = 0$$

Bevisa också att dessa linjer ligger i ytans tangentplan i punkten P. (4p)

4. Lös differentialekvationen.

$$xf'_x(x, y) + 2yf'_y(x, y) = 2x^2y^2, \quad x > 0, \ y > 0$$

genom att införa de nya variablerna u och v definierade av

$$\begin{cases} u = y/x^2 \\ v = x \end{cases}$$

(3p)

5. Låt $a > b > c > 0$ vara tre reella tal och definiera mängden M enligt:

$$M = \{ (x, y, z) \,|\, x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1 \}$$

Du vill maximera volymen på ett rätblock ("tegelsten") som är inskriven i mängden (inga av punkterna i rätblocket får alltså ligga i komplementet till M). Så, bestäm rätblockets maximala volym och motsvarande kantlängder.
Ledning: Du får anta att rätblocket och M har samma symmetriaxlar (med avseende på rotation). (3p)

6. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$$z = 15 - x^2 - (y-2)^2 \text{ och } z = 3 + (x+2)^2 + y^2 \qquad \text{(3p)}$$

7. Beräkna

$$\int_\gamma xy \; dx + e^x \; dy$$

där γ är parabelbågen $x - y^2 = 0$ som börjar i $(x, y) = (1, 1)$ och slutar i $(x, y) = (0, 0)$. (3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet.

$$\text{a)} \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2 - x_n^2}, \quad \text{med} \ \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ n \geq 10$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + 4y^2}$$

(3p)

Formelblad: flervariablematematik för Z2, MVE041, MVE040, Chalmers

Får användas på tentamen i flervariablematematik
för Z2 när ansvarig är Thomas Ericsson.

Trigonometri:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \quad \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vektorprodukt: Med $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ och $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ är

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}, \quad (\alpha\,\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\alpha\,\mathbf{b}) = \alpha\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

Några Taylorutvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \le 1 \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots, \quad |x| < 1 \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots, \quad |x| \le 1 \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + \dots, \quad -1 < x \le 1
\end{aligned}$$

Några integraler, integrationskonstanten är utelämnad. $a > 0$, $c > 0$.

$$\int \sqrt{a^2x^2 \pm c^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2x^2 \pm c^2} \pm \frac{c^2}{2a}\ln\left|ax + \sqrt{a^2x^2 \pm c^2}\ \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 \pm c^2}}\ dx = \frac{1}{a}\ln\left|ax + \sqrt{a^2x^2 \pm c^2}\ \right|$$

$$\int \sqrt{c^2 - a^2x^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - a^2x^2} + \frac{c^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{c}$$

Rymdpolära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\psi \\ y = r\sin\theta\sin\psi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \psi < 2\pi, \quad \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\psi)} = r^2\sin\theta$$

Tangentplanet i (a,b,c) till $f(x,y,z) = C$:

$$f'_x(a,b,c)\,(x-a) + f'_y(a,b,c)\,(y-b) + f'_z(a,b,c)\,(z-c) = 0$$

Taylors formel:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\,h + f'_y(a,b)\,k + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,hk + f''_{yy}(a,b)\,k^2\right) + \left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}\ B(h,k)$$

Greens formel:

$$\int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\,dy$$

Ett Newtonsteg:

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)\ \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)$$

Ett Newtonsteg (för optimering):

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)\ \nabla f\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)$$

Ett Eulersteg:

$$\mathbf{y}^{(j+1)} = \mathbf{y}^{(j)} + h\,\mathbf{f}\left(t_j, \mathbf{y}^{(j)}\right)$$

Approximationer av några funktionsvärden:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	0	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094	1.7918	1.9459	2.0794	2.1972	2.3026
$\log_{10} x$	0	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451	0.9031	0.9542	1
e^x	2.7183	7.3891	20.086	54.598	148.41	403.43	1096.6	2981.0	8103.1	22026
$\sqrt{x}$	1	1.4142	1.7321	2	2.2361	2.4495	2.6458	2.8284	3	3.1623
$1/\sqrt{x}$	1	0.7071	0.5774	0.5000	0.4472	0.4082	0.3780	0.3536	0.3333	0.3162
$\sin(\pi x/20)$	0.1564	0.3090	0.4540	0.5878	0.7071	0.8090	0.8910	0.9511	0.9877	1
$\cos(\pi x/20)$	0.9877	0.9511	0.8910	0.8090	0.7071	0.5878	0.4540	0.3090	0.1564	0
$\tan(\pi x/20)$	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	∞
$\arcsin(x/10)$	0.1002	0.2014	0.3047	0.4115	0.5236	0.6435	0.7754	0.9273	1.1198	1.5708
$\arccos(x/10)$	1.4706	1.3694	1.2661	1.1593	1.0472	0.9273	0.7954	0.6435	0.4510	0
$\arccos(-x/10)$	1.6710	1.7722	1.8755	1.9823	2.0944	2.2143	2.3462	2.4981	2.6906	3.1416