Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Tentamen: Flervariabelmatematik Z2, MVE040, Chalmers, 2008-01-19, V

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.
Vakt:	David Heintz, tel. 0762-721860.
	Frågor om tentamen kan ställas omkring 15 och 17.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	Måndag på www.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.
- Vektorer och matriser skrivs med **fetstil** och ej med tilde (˜).

Kontrollera att Du skriver rätt flervariabel-tenta! Det kan gå flera samma dag.

---

1. Man kan, som bekant, använda Newtons metod på gradienten för att (försöka) beräkna en stationär punkt till en reellvärd funktion. Låt $f(x, y) = xy^2 + \sin(xy)$. Ställ upp systemet av ekvationer och formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

2. `fmincon`, som användes i lab3, kan ju lösa följande problem:

```
min f(x)
  LB <= x <= UB                        enkla gränser
  A * x  <= B,     Aeq * x = Beq       linjära bivillkor
  C(x)   <= 0,     Ceq(x)  = 0         ickelinjära bivillkor
```

   Vi minns också funktionsprototyperna och anropet av `fmincon`:

```
function obj_val = obj_fun(x)  och  function [in_eq, eq] = constr_fun(x)
[x_opt, obj_val] = fmincon(@obj_fun, x_guess, A, B, Aeq, Beq, LB, UB, @constr_fun)
```

   Skriv en Matlabkod som utnyttjar `fmincon` för att lösa följande problem:
   Vi vill maximera volymen av en låda (rätblock) då längden på varje sida får vara högst 0.5 m. Åtminstone en sida skall ha en längd som är minst 0.3 m. Summan av längd, bredd och höjd får inte överstiga 0.65 m. Lådans area får inte överstiga 0.3 m^2. En sidoytas omkrets får inte överstiga 1 m. Du behöver **inte** skicka med extra `options`. (3p)

Fortsättning på nästa sida!

3. Tangentplanet i en punkt P på enhetssfären går genom punkterna $(2,0,0)$ och $(0,4,0)$. Bestäm alla punkter P med denna egenskap. (3p)

4. Transformera differentialekvationen

$$xf''_{xx}(x,y) - f''_{xy}(x,y) + f'_x(x,y) = xe^{2y}$$

genom att införa de nya variablerna u och v definierade av

$$\begin{cases} u = xe^y \\ v = y \end{cases}$$

Bestäm sedan alla lösningar till differentialekvationen. (3p)

5. Beräkna minsta och största värde av

$$f(x,y) = 4x^2 + x + 5y^2 + y$$

på området $4x^2 + 5y^2 \leq 1, \ \ x \geq 0$. (4p)

6. Skissera samt beräkna volymen av den kropp som innehåller punkten $(0,0,1)$ och begränsas av ytorna:

$$z = x^2 + y^2 \ \text{ samt } \ z = 3 - (x^2 + y^2) \qquad \text{(3p)}$$

7. Beräkna

$$\int_\gamma xye^x \, dx + xy \sin y \, dy$$

där γ går **medurs** runt (den slutna) kvadraten med hörn i $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ och $(1,2)$. (3p)

8. m och n är godtyckliga **positiva** heltal. Avgör för vilka m och n följande gränsvärde existerar och beräkna i så fall gränsvärdet (som givetvis kan bero av m och n). (För att få full poäng måste du givetvis bevisa att gränsvärde inte existerar för övriga m och n.)
Lösta specialfall, med t.ex. speciella heltalsvärden på m och n, ger inga poäng.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{x^m + y^n}$$

(3p)

FORMELBLAD!!!!!!!!!!!!!!