Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2006-10-23

1. Systemet $\text{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$ blir

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy\cos(x^2+y^2) = 0 \\ -\sin(x^2+y^2) - 2y^2\cos(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \mathbf{H}(x_k,y_k)^{-1} \begin{bmatrix} 3x_k^2 - 2x_k y_k\cos(x_k^2+y_k^2) \\ -\sin(x_k^2+y_k^2) - 2y_k^2\cos(x_k^2+y_k^2) \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{H}(x_k,y_k) = \begin{bmatrix} 6x_k - 2y_k\cos(x_k^2+y_k^2) + 4x_k^2 y_k\sin(x_k^2+y_k^2) & -2x_k\cos(x_k^2+y_k^2) + 4x_k y_k^2\sin(x_k^2+y_k^2) \\ -2x_k\cos(x_k^2+y_k^2) + 4x_k y_k^2\sin(x_k^2+y_k^2) & -6y_k\cos(x_k^2+y_k^2) + 4y_k^3\sin(x_k^2+y_k^2) \end{bmatrix}$$

2. Inför $y_1 = r_1$, $y_2 = r_2$ samt $y_3 = v$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_3 t y_1/\sqrt{y_1^2+y_2^2} \\ y_2' = y_2 + y_3 t y_2/\sqrt{y_1^2+y_2^2} \\ y_3' = y_1 - y_2 + t y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 4 \\ y_3(2) = 5 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_1^{(0)} + y_3^{(0)} t_0 y_1^{(0)}/\sqrt{(y_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)})^2} \\ y_2^{(0)} + y_3^{(0)} t_0 y_2^{(0)}/\sqrt{(y_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)})^2} \\ y_1^{(0)} - y_2^{(0)} + t_0 y_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 3 + 5\cdot 2\cdot 3/\sqrt{3^2+4^2} \\ 4 + 5\cdot 2\cdot 4/\sqrt{3^2+4^2} \\ 3 - 4 + 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9 \\ 5.2 \\ 5.9 \end{bmatrix}$$

3. Låt $z = f(x,y)$. Tangentplanet i punkten $(a,b,f(a,b))$ har ekvationen:

$$z = f(a,b) + f_x'(a,b)(x-a) + f_y'(a,b)(y-b) \Leftrightarrow f_x'(a,b)x + f_y'(a,b)y - z + f(a,b) - af_x'(a,b) - bf_y'(a,b) = 0$$

så en normalvektor är $[f_x'(a,b), f_y'(a,b), -1]$. Så i vårt fall kräver vi att $[4a, 2b, -1] = [4, 4, -1]$ (det duger inte med någon annan multipel eftersom z-komponenterna båda är -1). Detta ger $a = 1, b = 2$ så att planet är

$$z = 6 + 4(x-1) + 4(y-2)$$

4. Derivera:
$f_x' = 2(x+y)g'$, $f_{xx}'' = 2g' + 4(x+y)^2 g''$, $f_{xy}'' = 2g' + 4(x+y)^2 g''$, $f_y' = 2(x+y)g'$, $f_{yy}'' = 2g' + 4(x+y)^2 g''$ så att

$$f_{xx}''(x,y) + f_{xy}''(x,y) + f_{yy}''(x,y) = 2g' + 4(x+y)^2 g'' + 2g' + 4(x+y)^2 g'' + 2g' + 4(x+y)^2 g'' = 6g' + 12(x+y)^2 g''$$

Sätt $t = (x+y)^2$. Vi får DE:

$$12(tg'' + g'/2) = 12t \quad \Leftrightarrow \quad g'' + g'/(2t) = 1$$

som kan lösas på flera olika sätt; här följer ett. Inför $u = g'$, ger $u' + u/(2t) = 1$. Lös med integrerande faktor, $u = 2t/3 + C/\sqrt{t}$, så att $g = t^2/3 + 2C\sqrt{t} + C_2$.
Så svar: $f(x,y) = (x+y)^4/3 + C_1(x+y) + C_2$ där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

5. Gradienten blir

$$\nabla f = (2x + 3x^2/2 - y, 2y - x) \quad \text{och} \quad \nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (-1, -1/2)$$

där rötterna till systemet fås genom att lösa ut y från den andra ekvationen och sedan sätta in detta uttryck i den första, vilket ger $(3/2)x(1 + x) = 0$ som har lösningar $x = 0 \vee x = -1$. Detta i den andra ekvationen ger y-värdena. Nu till deras karaktär.

$$Q(h, k) = (2 + 3x)h^2 - 2hk + 2k^2$$

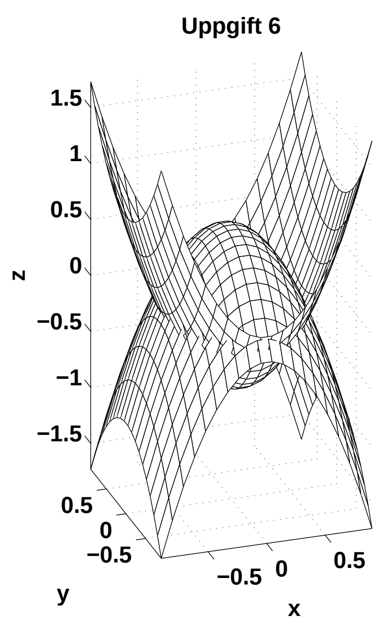
För $(x, y) = (0, 0)$ blir $Q(h, k) = 2(h^2 - hk + k^2)$ som är positivt definit, ty

$$h^2 - hk + k^2 = (h - k/2)^2 + 3k^2/4$$

som är positivt definit, ty Q är en summa av kvadrater och $Q(h, k) = 0$ kan inträffa endast om $h = k = 0$. $(0, 0)$ är således en strängt lokal minimipunkt.

För $(x, y) = (-1, -1/2)$ blir $Q(h, k) = -h^2 - 2hk + 2k^2$ som är indefinit ty $Q(1, 0) = -1 < 0$ och $Q(0, 1) = 2 > 0$. och $(-1, -1/2)$ är en sadelpunkt.

6. Här är först en bild:



$z = a - 2x^2 - y^2$ liknar en uppochnedvänd kopp. Ökar vi a lyfts koppen utmed z-axeln. $z = 2x^2 + y^2 - a$ är en rättvänd kopp, spegelbilden av den första i x-y-planet (enbart tecken skiljer ju). När $a = 0$ tangerar kopparna varandra i origo och volymen är noll. Vid ökande a kommer en äggliknande kropp att inneslutas. Volymen, $V(a)$, ges av:

$$V(a) = \iint_D a - 2x^2 - y^2 - (2x^2 + y^2 - a) \; dxdy = 2 \iint_D a - 2x^2 - y^2 \; dxdy$$

där D ges av ytornas skärning med $z = 0$ så att

$$D = \{ \; (x, y) \mid 2x^2 + y^2 - a \le 0 \; \} = \{ \; (x, y) \mid 2x^2 + y^2 \le (\sqrt{a})^2 \; \}$$

Inför nu elliptisk-polära koordinater, $x = (r/\sqrt{2})\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. $0 \le r \le \sqrt{a}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten blir

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \det \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2})\cos\varphi & -r/\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r/\sqrt{2}$$

Alltså:

$$V(A) = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(\int_0^{2\pi} (a - r^2)\ r/\sqrt{2}\ d\varphi \right) dr = 2 \cdot 2\pi/\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{a}} (a - r^2)\ r\ dr =$$

$$4\pi/\sqrt{2}\left[ar^2/2 - r^4/4\right]_0^{\sqrt{a}} = a^2\pi/\sqrt{2}$$

Vi skall alltså ta $a = 2^{1/4}$ för att få $V(a) = \pi$.

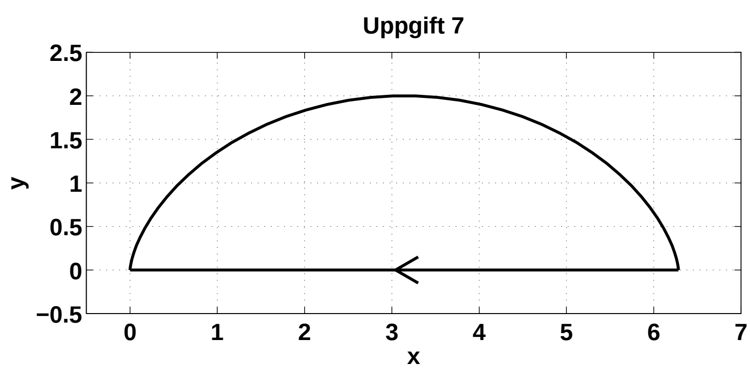
7. Vi har

$$\int_{\partial D} -y\ dx = \iint_D -\frac{\partial}{\partial y}\ (-y)\ dxdy = \iint_D\ dxdy = \mu(D) \quad \text{(arean)}$$

Alternativt kan man ta

$$\int_{\partial D} x\ dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\ x\ dxdy = \iint_D\ dxdy = \mu(D)$$

Här är en bild av randen, observera orienteringen, som är **negativ**.



Låt oss ta den andra varianten, integralen över x-axeln är noll. Observera det första minustecknet! Vi använder partiell integration för $t\sin t$ och formeln för dubbla vinkeln för $\sin^2 t$.

$$-\mu(D) = \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sin t\ dt = [\ t\ (-\cos t)\ ]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos t\ dt - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\ dt =$$

$$-2\pi + [\sin t - t/2 + \sin(2t)/4]_0^{2\pi} = -3\pi \Rightarrow \mu(D) = -(-3\pi) = 3\pi$$

Svar: arean är 3π.

8. Gränsvärdet i a) existerar inte. Tag först $x_1 = 0$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{(|\mathbf{x}| - x_1)\ (|\mathbf{x}| + x_1)}{(|\mathbf{x}| - x_1/2)^2} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|^2} = 1$$

Tag sedan $\mathbf{x} = (x_1, 0, \ldots, 0),\ x_1 > 0$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{(|x_1| - x_1)\ (|x_1| + x_1)}{(|x_1| - x_1/2)^2} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{0 \cdot 2x_1}{(x_1/2)^2} = 0$$

där x_1 närmar sig 0 från höger. Så vi kan få olika gränsvärden beroende på hur vi närmar oss $\mathbf{0}$.

I b) existerar gränsvärdet och är lika med ett.

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \frac{|\mathbf{x}| - \sqrt{|x_1|}}{|\mathbf{x}| + \sqrt{|x_1|}} = \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \frac{1 - \sqrt{|x_1|}\ /\ |\mathbf{x}|}{1 + \sqrt{|x_1|}\ /\ |\mathbf{x}|}$$

Vi studerar nu, med instängning, $t = \sqrt{|x_1|}\ /\ |\mathbf{x}|$ separat.

$$0 \le \frac{\sqrt{|x_1|}}{|\mathbf{x}|} \le \frac{\sqrt{|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} \to 0,\ |\mathbf{x}| \to \infty$$

Alltså gäller att $t \to 0,\ |\mathbf{x}| \to \infty$. Vi använder nu gränsvärden av sammansatta funktioner. Eftersom (pga kontinuitet)

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-t}{1+t} = 1$$

är gränsvärdet i uppgiften lika med ett.