Kortfattade lösningsförslag: Flervariabelmatematik för Z2

2006-09-01

1. $\mathbf{X}$ är ju övetriangulär och definieras av tre element. Låt $\alpha = x_{1,1}$, $\beta = x_{1,2} = x_{2,1}$ och $\gamma = x_{2,2}$. Vi har då:

$$\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + 2\alpha & \alpha\beta + \beta\gamma + 2\beta \\ 0 & \gamma^2 + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha = 1 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + 2\beta = 2 \\ \gamma^2 + 2\gamma = 3 \end{cases}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\alpha_k + 2 & 0 & 0 \\ \beta_k & \alpha_k + \gamma_k + 2 & \beta_k \\ 0 & 0 & 2\gamma_k + 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_k^2 + 2\alpha_k - 1 \\ \alpha_k\beta_k + \beta_k\gamma_k + 2\beta_k - 2 \\ \gamma_k^2 + 2\gamma_k - 3 \end{bmatrix}$$

2. Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = ty_1y_3 + y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_2 - y_3 + y_1^2 \\ y_4' = y_2 + y_1 + 2y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 1 \\ y_3(2) = 2 \\ y_4(2) = 4 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0 y_1^{(0)} y_3^{(0)} + y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \\ y_2^{(0)} + y_1^{(0)} + 2y_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \\ 2 \\ 1 - 2 + 3^2 \\ 1 + 3 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ 1.2 \\ 2.8 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

3. Enhetssfären ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Om punkten P skrivs (a, b, c) ges tangentplanet (i P) av:

$$2a(x - a) + 2b(y - b) + 2c(z - c) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$$

Punkten P ligger ju på enhetssfären, så att $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ och planet ges alltså av $ax + by + cz = 1$. Nu ligger ju $(x, y, z) = (4, 0, 0)$ samt $(x, y, z) = (0, 4, 0)$ i planet vilket medför att $4a = 1$ och $4b = 1$ så att $a = b = 1/4$. Eftersom $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ blir $c^2 = 1 - 1/16 - 1/16$ så att $c = \pm\sqrt{14}/4$. Tänkbara punkter P är således $(1, 1, -\sqrt{14})/4$ samt $(1, 1, \sqrt{14})/4$.

4. Derivera, $f_x' = 2xg'$, $f_{xx}'' = 2g' + 4x^2g''$, $f_y' = 2yg'$, $f_{yy}'' = 2g' + 4y^2g''$ så att

$$f_{xx}''(x, y) + f_{yy}''(x, y) = 2g' + 4x^2g'' + 2g' + 4y^2g'' = 4g' + 4(x^2 + y^2)g''$$

Sätt $t = x^2 + y^2$. Vi får DE:

$$4(tg'' + g') = 4t$$

som kan lösas på flera olika sätt; här följer ett. Inför $u = g'$, ger $u' + u/t = 1$. Lös med integrerande faktor, $u = t/2 + C_1/t$, så att $g = t^2/4 + C_1 \ln t + C_2$.
Så svar: $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2/4 + C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$ där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

5. Gradienten blir

$$\nabla f = (4x^3 + 4y, 4x + 4y^3) \quad \text{och} \quad \nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (1, -1) \vee (x, y) = (-1, 1)$$

där rötterna till systemet fås genom att lösa ut y från den första ekvationen och sedan sätta in detta uttryck i den andra, vilket ger $x - x^9 = 0$ som har lösningar $x = 0 \vee x = \pm 1$. Detta i den första ekvationen ger y-värdena. Nu till deras karaktär.

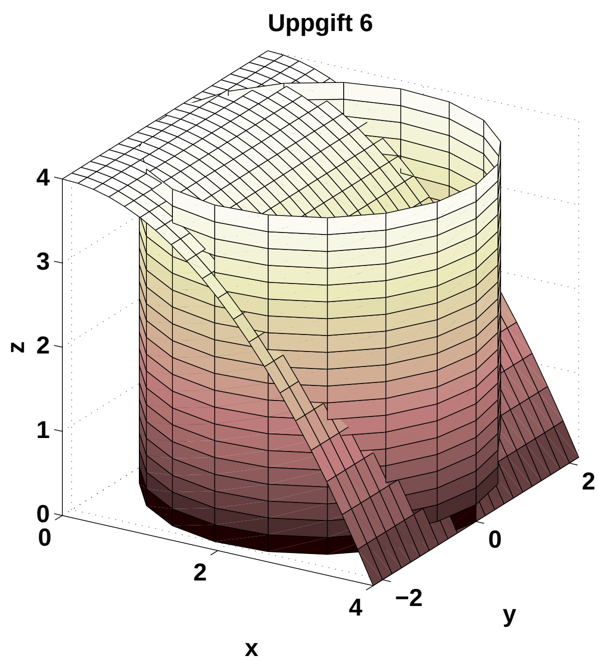
$$Q(h, k) = 12x^2h^2 + 8hk + 12y^2k^2$$

För $(x,y) = (0,0)$ blir $Q(h,k) = 8hk$ som är indefinit $Q(1,1) > 0$, $Q(1,-1) < 0$. För $(x,y) = \pm(1,-1)$ blir (man får lite enklare räkningar om man bryter ut faktorn fyra som inte påverkar tecknet).

$$\frac{Q(h,k)}{4} = \left(\sqrt{3}h + \frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8k^2}{3}$$

som är positivt definit, ty Q är en summa av kvadrater och $Q(h,k) = 0$ kan endast inträffa om $h = k = 0$. $(-1,1), (1,-1)$ är alltså strängt lokala minimipunkter och $(0,0)$ är en sadelpunkt.

6. Här är först en bild:



Kvadratkomplettering av $x^2 + y^2 = 4x$ ger $(x-2)^2 + y^2 = 4$, så att området i xy-planet, $D = \{\ (x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \le 4\ \}$. Inför nu polära koordinater, $x = 2 + r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten blir

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r$$

Volymen kan då skrivas:

$$V = \iint_D 4 - x^2/4 \; dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 r(4 - (2 + r\cos\varphi)^2/4)\; dr\right]\; d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 3r - r^2\cos\varphi - (r^3/4)\cos^2\varphi \; dr\right]\; d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[3r^2/2 - (r^3/3)\cos\varphi - (r^4/16)\cos^2\varphi\right]_{r=0}^{r=2} \; d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} 6 - \frac{8\cos\varphi}{3} - \cos^2\varphi \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{11}{2} - \frac{8\cos\varphi}{3} - \frac{\cos(2\varphi)}{2} \; d\varphi = \left[\frac{11\varphi}{2} - \frac{8\sin\varphi}{3} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{2\pi} = 11\pi$$

7. Man kan använda Greens formel och får då komplettera med linjen mellan $(3,0)$ och $(0,0)$. Jag har valt att integrera direkt. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ där $\gamma_1 : (t,0), 0 \le t \le 2$, $\gamma_2 : (2-t, 3t/2), 0 \le t \le 2$,

$$\int_{\gamma_1} x + y \; dx + x^2 + y^2 \; dy = \int_0^2 (t+0)\cdot 1 + 0 \; dt = 2$$

$$\int_{\gamma_2} x + y \; dx + x^2 + y^2 \; dy = \int_0^2 ((2-t) + (3t/2)) \cdot (-1) + \left((2-t)^2 + (3t/2)^2\right) \cdot 3/2 \; dt = \cdots = 8$$

Svar: kurvintegralens värde är $2 + 8 = 10$.

8. I a) existerar gränsvärdet och är lika med ett.

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}| - x_1^2}{|\mathbf{x}| + x_1^2} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{1 - x_1^2/|\mathbf{x}|}{1 + x_1^2/|\mathbf{x}|}$$

Vi studerar nu $x_1^2/|\mathbf{x}|$ separat. Gränsvärdet är noll, ty om $x_1 = 0$ så är kvoten noll och annars använder vi instängning:

$$0 \le \frac{x_1^2}{|\mathbf{x}|} = \frac{|x_1|^2}{|\mathbf{x}|} \le \frac{|x_1|^2}{|x_1|} = |x_1| \to 0, \;\; \mathbf{x} \to \mathbf{0}$$

Vi kan nu använda gränsvärdesregeln för summa $(1 - x_1^2/|\mathbf{x}| \to 1, 1 + x_1^2/|\mathbf{x}| \to 1)$ och sedan regeln för kvot.

Gränsvärdet i b) existerar inte. Tag först $x_1 = 0$,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}| - x_1}{|\mathbf{x}| + x_1} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = 1$$

Tag sedan $\mathbf{x} = (x_1, 0, \ldots, 0), \;\; x_1 > 0$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}| - x_1}{|\mathbf{x}| + x_1} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{|x_1| - x_1}{|x_1| + x_1} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{0}{2x_1} = 0$$

där x_1 närmar sig 0 från höger. Så vi kan få olika gränsvärden beroende på hur vi närmar oss $\mathbf{0}$.