# Tentamen: Flervariabelanalys Z2, MVE040, Chalmers, 2006-01-13, M-huset

| | |
|---|---|
| Skrivtid: | 08.30-12.30. |
| Ansvarig: | Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. |
| Vakt: | Oscar Marmon, tel. 0762-721860<br>Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 11.30. |
| Resultat: | Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum. |
| Betygsgränser: | 10, 15, 20 poäng av maximalt 25. |
| Lösningsförslag: | På www efter kl. 19. |
| **Hjälpmedel**: | Inga, förutom bifogat formelblad. |

**Iakttag följande:**
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Vi vill bestämma en **symmetrisk** $2 \times 2$-matris $\mathbf{X}$ som satisfierar matrisekvationen:
$$\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Inför lämpliga beteckningar för de obekanta elementen i matrisen, ställ upp ett system av ekvationer för de obekanta. Formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. (3p)

2. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. ($u$ och $v$ är skalära funktioner av tiden $t$.)
$$\begin{cases} v' = tvu'' + u' \\ u''' = u - u' + v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3 \\ u(2) = 1, u'(2) = 2, u''(2) = 4 \end{cases} \qquad \text{(3p)}$$

3. Temperaturen, $T$, i en punkt $(x, y, z)$ i en metallboll varierar omvänt proportionellt mot punktens avstånd från bollens centrum (som vi kan låta ligga i origo). Temperaturen i punkten $(1, 2, 2)$ är $120°$.
   (a) Bestäm hur snabbt temperaturen ändras i punkten $(1, 2, 2)$ i riktning mot punkten $(2, 1, 3)$.
   (b) Visa, för en godtycklig punkt $\neq (0, 0, 0)$ i bollen, att temperaturökningen är snabbast i riktning mot origo.

   (3p)

4. Hitta alla lösningar till differentialekvationen
$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = 2$$
där $f$ är av formen $f(x, y) = g(x^2 + y^2), x, y > 0$. (3p)

5. Låt $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$. Beräkna funktionens stationära punkter och avgör vilka som är lokala extrempunkter och dessa punkters karaktär. (3p)

6. Beräkna volymen av kroppen som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 2x$ samt mellan $xy$-planet och ytan $z = x^2 + y^2$. (3p)

**Fortsättning på nästa sida!**

---

7. Beräkna

$$\int_\gamma xy^2 + xy\ dx + x^3\ dy$$

där $\gamma$ är den kurva som i tur och ordning med räta linjer förbinder punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,3)$. (3p)

8. Avgör för a) respektive b) nedan om gränsvärdet existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ med $n \geq 2$. (4p)

a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}| + x_1^2}$ b) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin(|\mathbf{x}| + x_1)}{|\mathbf{x}|}$